



Revista Internacional de Investigación e Innovación Tecnológica

Página principal: www.riit.com.mx

Analizando la Rigidez de un Rotor con Fisura Transversal Triangular

Analyzing the Stiffness of a Shaft with Triangular Cross Crack

Jiménez-Rabiela, H., Vázquez-González, B., Álvarez-Miranda, G. D.

Universidad Autónoma Metropolitana. Unidad Azcapotzalco. División de Ciencias Básicas e Ingeniería.
Departamento de Energía. Avenida San Pablo número 180, colonia Reynosa Tamaulipas. Delegación
Azcapotzalco. Ciudad de México. MÉXICO. hjr@correo.azc.uam.mx, bvg@correo.azc.uam.mx,
gdam@correo.azc.uam.mx

Innovación tecnológica: La frecuencia de resonancia en un rotor sin fisura ω_{rsf} , en un rotor con fisura es un rango $0.858\omega_{rsf} \leq \omega_{rcf} < \omega_{rsf}$.

Área de aplicación industrial: Detección oportuna de rotores con fisura, durante el transitorio al detener o al poner en operación la máquina, al monitorear el cambio de frecuencia de resonancia única ω_{rsf} al rango de frecuencias ω_{rcf} .

Recibido: 12 de diciembre 2015.

Aceptado: 20 de enero 2016.

Resumen

En este trabajo se determinó, la rigidez de un rotor con fisura transversal triangular en la parte media, dentro de su rango elástico, en condición estática, simplemente apoyado en sus extremos y con carga concentrada al centro. Se dedujo la relación funcional para la variación del segundo momento de área de sus diferentes secciones transversales. Se calculó la pendiente y deflexión por doble integración numérica obteniendo su curva elástica y el rango de frecuencias en el cual resonará el rotor con fisura. Adicionalmente fue obtenida la solución numérica para la orientación crítica de la fisura. Los valores calculados para el rotor con fisura se compararon con los valores correspondientes al rotor sin fisura, incluyendo en la comparación los resultados de la solución numérica. Los parámetros anteriores fueron calculados en función del ángulo de orientación de la fisura con respecto a la línea normal. De los valores obtenidos se concluyó que, dada la geometría del rotor y de la fisura, la carga aplicada, la condición de soporte, las propiedades físicas del material y considerando el inicio y crecimiento de la fisura; hay algunas frecuencias de resonancia para el rotor con fisura, en relación con el rotor sin fisura, donde el último tiene justo una frecuencia de resonancia. La variación entre la frecuencia de resonancia inicial del rotor con fisura y el valor de la frecuencia de resonancia del rotor sin fisura fue del orden de un cuarto para las mismas condiciones.

Palabras claves: Fisura, resonancia, rotor, rigidez.

Abstract

In this work, the stiffness of a shaft with triangular cross crack in the middle part, within its elastic range, in static condition, simply supported at its ends and middle concentrated load was determined. The functional relationship for the variation of second area moment of their different cross sections was deduced. It was calculated the slope and deflection by numerical integration double obtaining its elastic curve and the frequency range in which the fractured shaft resonates. Additionally the numerical solution to the critical orientation of the crack was obtained. The calculated values for the shaft with crack were compared with corresponding values to the shaft without crack, including the comparison the result of the numerical solution. The above parameters were calculated based on the angle of orientation of the crack with respect to the normal line. From the values obtained it was concluded that, given the geometry of the shaft and of the crack, the load applied, the support conditions, physical properties of the material and considering the start and growth of the crack; there are some frequencies of resonance for the shaft with crack, in relation with the shaft without crack, where the last one just have one resonance frequency. The variation between the initial resonance frequency of the shaft with crack and the value of the resonance frequency of the shaft without crack was of the order of a quarter for the same conditions.

Key words: Crack, resonance, shaft, stiffness.

1. Introducción

El inicio y crecimiento de una fisura en un rotor puede causar fractura con efectos catastróficos, T. Morais 2013, [1]. En años recientes se ha investigado el comportamiento de un rotor con fisura, para su detección oportuna, monitoreando los campos mecánico, térmico y acústico. También se ha estudiado la influencia del mecanismo de apertura y cierre de la fisura en su comportamiento, H. Wu y S. Joseph, 2014, [2]. Adicionalmente, también se ha investigado, experimental y numéricamente, la variación del segundo momento de área de sus diferentes secciones transversales, como una función de la orientación de la fisura. P. R. Baviskar y V. B. Tungikar, 2011, [3]. Y. T. Sawicki et al, 2003, [4] investigaron analítica y numéricamente la respuesta dinámica de un rotor Jeffcott con fisura pasando a través de la velocidad crítica con aceleración constante.

Numerosas técnicas de modelado de fisura fueron reportadas por G. Sabnavis et al en 2004 [5] y por V. Kumar y C. Rastogi en 2009 [6].

La fisura se considera triangular, puesto que es la geometría básica que más se aproxima a una fisura real.

El objetivo de este trabajo es determinar el rango de la frecuencia de resonancia, en un rotor con fisura triangular transversal, tanto analítica como numéricamente. Un trabajo futuro será la determinación de dicho rango para una fisura triangular diagonal, a menos de 45 grados respecto a la transversal. Lo anterior debido a que una fisura transversal implicaría flexión pura y una fisura a 45 grados implicaría torsión pura; en la realidad los rotores están sometidos a esfuerzos combinados de flexión y torsión.

1.1. Notación

a = Ancho de fisura = 1 mm.

b = Profundidad de fisura (mm).

$\frac{dY}{dX}$ = Pendiente, sin dimensión.

E = Módulo de Young = $1.94 * 10^6 \frac{Kg}{cm^2} = 190314 \frac{N}{mm^2}$; acero inoxidable 18-8.

F = Fuerza vertical aplicada al centro del rotor = 100 N.

I_{sf} = Segundo momento de área, sin fisura, con respecto a Z (mm^4).

I_{cf} = Segundo momento de área, con fisura, con respecto a Z (mm^4).

I_c = Segundo momento de área del círculo con respecto a Z (mm^4).

I_{sc} = Segundo momento de área del sector circular, con respecto a Z (mm^4).

I_{st} = Segundo momento de área del sector triangular, con respecto a Z (mm^4).

k = Rigidez N/mm.

L = Longitud del rotor = 160 mm.

M = Momento flexionante (N.mm).

p = Profundidad máxima de fisura = 1.25 mm, igual a $0.25r$.

r = Radio del rotor = 5 mm.

(X, Y, Z) = Sistema de coordenadas inercial.

X = Coordenada longitudinal del rotor.

Y = Coordenada transversal vertical del rotor.

Z = Coordenada transversal horizontal del rotor.

(x, y, z) = Sistema de coordenadas fijo al rotor.

x = Coordenada longitudinal del rotor.

y = Coordenada transversal del rotor, en posición inicial, vertical.

z = Coordenada transversal del rotor, en posición inicial, horizontal.

α = Ángulo de orientación de la fisura = ángulo entre los ejes z y Z , en posición inicial $\alpha = 0^\circ$.

β = Ángulo de la fisura en el plano xz , invariante sin apertura y cierre de la fisura = 21.80140949° .

δ = Ángulo de fisura paralelo al plano yz , variable en función de x .

Δ = Deflexión máxima del rotor (mm).

γ = Máximo ángulo de fisura paralelo al plano $yz = 41.40962211^\circ$.

$\varphi_i = \alpha - \delta$ = Ángulo con respecto al eje Z , en el cual inicia la fisura, paralelo al plano yz .

$\varphi_f = \alpha + \delta$ = Ángulo con respecto al eje Z , en el cual termina la fisura, paralelo al plano yz .

ρ = Densidad del rotor = $0.000007817 \text{ Kg}/(\text{mm}^3)$, acero inoxidable 18-8.

ω_{rsf} = Frecuencia, de resonancia, del rotor sin fisura, en radianes por segundo.

ω_{rcf} = Frecuencia, de resonancia, del rotor con fisura, en radianes por segundo.

1.2. Sistemas de coordenadas

El origen del sistema de coordenadas inercial (X, Y, Z) está localizado en el centro de la sección transversal izquierda del rotor como se muestra en la Figura 1. El eje X coincide con el eje longitudinal del rotor. El eje Y es transversal al rotor y vertical. El eje Z es transversal al rotor y horizontal.



Figura 1. Sistema de coordenadas inercial, $\alpha = 0^\circ$.

El origen del sistema de coordenadas fijo al rotor (x, y, z) coincide con el origen del sistema de coordenadas inercial. El eje x coincide en todo momento con el eje X . Los ejes y y z se mueven junto con el rotor alrededor del eje X . En la Figura 1 se muestra la condición del rotor para $\alpha = 0^\circ$; es decir, considerando que la fisura está representada por su superficie externa es posible asignarle un vector unitario normal; luego $\alpha = 0^\circ$ si el vector unitario normal a la superficie tiene la misma dirección y sentido que el eje Z . En la Figura 2 se muestra la condición para $\alpha = 90^\circ$. De las Figuras 1 y 2 se sigue que la rotación es positiva, en el sentido contrario a las manecillas del reloj, observada desde el lado izquierdo del rotor.



Figura 2. Fisura en la dirección y sentido del eje Y .

2. Materiales y equipos

En milímetros: el radio del rotor es de 5, su longitud es de 160; el ancho de la fisura es de 1 y su profundidad máxima de $5/4$. El material es acero inoxidable 18-8. La fuerza vertical aplicada al centro del rotor es 100 N. Las condiciones restantes se indican en el inciso 1.1 (Notación) incluyendo valores y unidades de los parámetros.

2.1. Segundo momento de área

Cómo lo mencionan J. J. Sinou y A. W. Lees, 2005 [7], una fractura transversal en un rotor, puede ser caracterizada por las variaciones del segundo momento de área, de la sección donde se considera la fractura.

En el caso estudiado el segundo momento de área fue obtenido en base a la Figura 3, donde se

muestran las dimensiones del rotor a lo largo de su eje longitudinal y a la Figura 4 que muestra un detalle de la sección longitudinal en el plano xz. Desde estas Figuras se obtienen las ecuaciones (1) a (3).

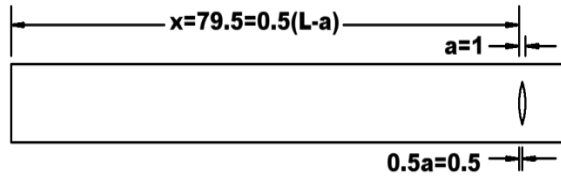


Figura 3. Dimensiones a lo largo del eje X.

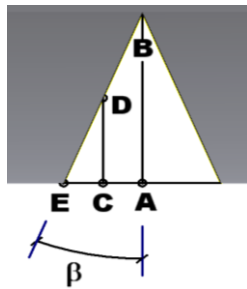


Figura 4. Detalle de la fisura, $\alpha = 270^\circ$.

$$\beta = \arctan\left(\frac{a}{2p}\right) \tag{Ec. (1)}$$

$$\frac{a}{2p} = \frac{x-0.5(L-a)}{b} \tag{Ec. (2)}$$

$$b = \frac{2px-p(L-a)}{a} \tag{Ec. (3)}$$

Donde $a = 2\overline{AE}$, $p = \overline{AB}$ y $b = \overline{CD}$.

Una representación de la sección transversal del rotor a lo largo de la fisura, ver Figura 5 desde la cual se puede obtener la Ec. (4), es representada por una combinación de varias secciones: sección circular completa de radio r ,

un sector circular y un sector triangular. Ferdinand P. Beer y E. Russel Johnston, 2010 [8], sugieren descomponer el área compleja en áreas básicas para obtener el segundo momento de área compleja. En el límite, cuando el parámetro b tiende al parámetro p , la Ec. (4) se transforma en Ec. (5).

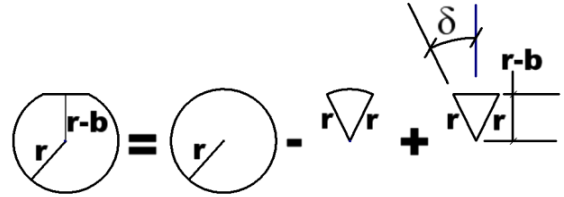


Figura 5. Sección CD, paralela al plano yz.

$$\delta = \arccos\left(\frac{r-b}{r}\right) \tag{Ec. (4)}$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{r-p}{r}\right) \tag{Ec. (5)}$$

En la Figura 5, el segundo momento de área puede obtenerse con la Ec. (6) en la cual los momentos I_c e I_{sc} están dados por las ecuaciones (7) y (8).

$$I_{cf} = I_c - I_{sc} + I_{st} \tag{Ec. (6)}$$

$$I_c = \pi \frac{r^4}{4} \tag{Ec. (7)}$$

$$I_{sc} = \left[\frac{(\varphi_f - \text{sen}\varphi_f \cos\varphi_f) - (\varphi_i - \text{sen}\varphi_i \cos\varphi_i)}{2} \right] \frac{r^4}{4} \tag{Ec. (8)}$$

Ec. (8)

Una sección transversal del rotor en la zona de la fisura cuando crece α se muestra en las Figuras 6.a, 6.b y 6.c. La fisura es representada por el área AGNA. Para 6.a el triángulo OGNO es igual al triángulo OGKO más el triángulo OKNO, para 6.b y 6.c el triángulo OGNO es igual al triángulo OGKO menos el triángulo OKNO.

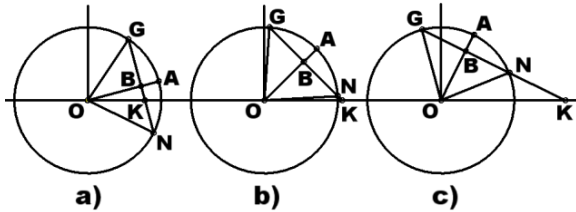


Figura 6. Sección transversal en fisura, $\alpha = BOK$.

La Ec. (9) se obtiene de las Figuras 5 y 6. Usando identidades trigonométricas y simplificando se transforma en Ec. (10).

$$I_{st} = \left(\frac{r-b}{12\cos\alpha}\right) \{[r\text{sen}(\alpha + \delta)]^3 - [r\text{sen}(\alpha - \delta)]^3\}$$

Ec. (9)

$$I_{st} = \left(\frac{r^4}{6}\right) [3\text{sen}\delta(\text{sen}\alpha)^2(\cos\delta)^3 + \cos\delta(\cos\alpha)^2(\text{sen}\delta)^3]$$

Ec. (10)

Sustituyendo las ecuaciones (7), (8) y (10) en la Ec. (6) se obtiene la expresión del segundo momento de área I_{cf} , en la zona de la fisura, en función de α y de x . En la Figura 7 se muestra la variación de I_{cf} , para cuatro valores de α , en función de x . Note que en la zona de la fisura ($79.5 \leq x \leq 80$) el segundo momento de área, con fisura, disminuye mientras x aumenta. Por otro lado, la disminución, del mencionado segundo momento de área, es mucho más significativa cuando α aumenta.

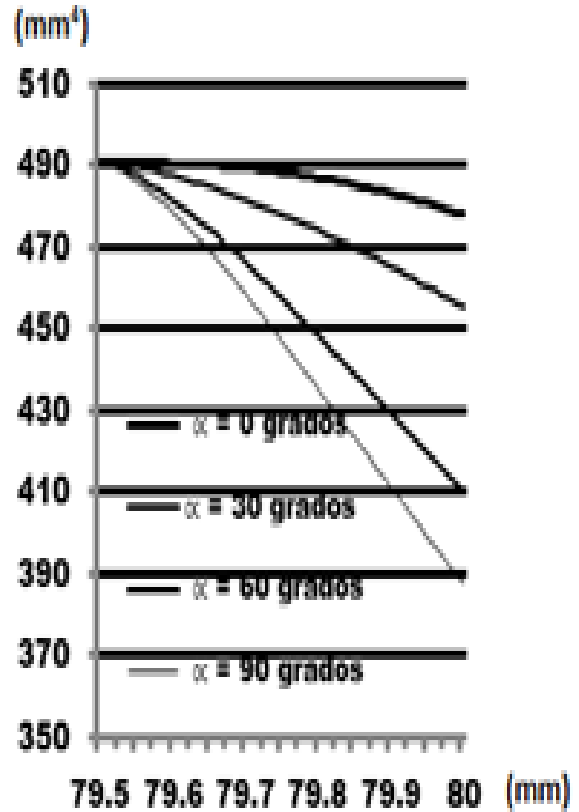


Figura 7. I_{cf} $\alpha = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ y 90° .

2.2. Pendientes y deflexiones

Usando la teoría de vigas y por doble integración numérica, puesto que son características dinámicas estructurales, se evalúan las pendientes y deflexiones a lo largo del rotor con fisura.

En las figuras 8 y 10, respectivamente, se muestran las pendientes y deflexiones correspondientes a medio rotor ($0 \leq X \leq 80$).

En las figuras 9 y 11 se muestran los detalles correspondientes para media fisura ($79.5 \leq X \leq 80$). Se muestran curvas, en cada caso, para $\alpha = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ y 90° . Las figuras 8 y 10 están desplegadas como una curva única debido a la escala. En las figuras 9 y 11 están claramente diferenciadas las cuatro curvas.

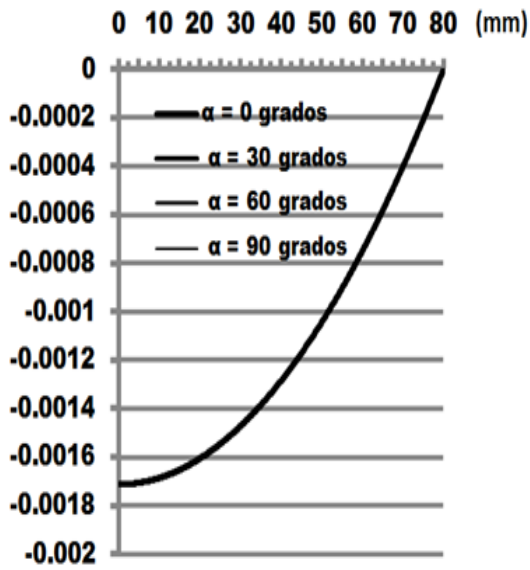


Figura 8. Pendientes para medio rotor.

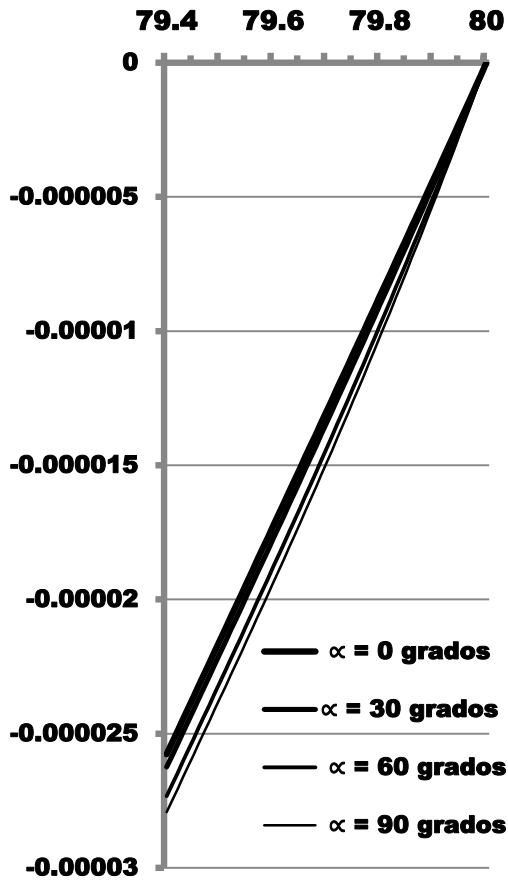


Figura 9. Pendientes para media fisura.

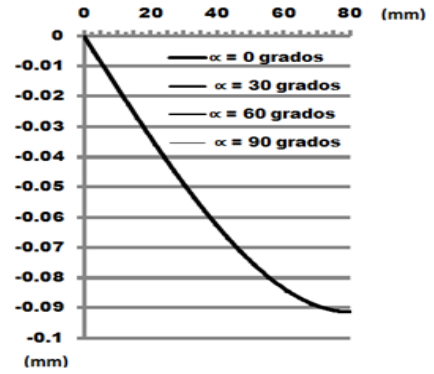


Figura 10. Deflexiones para medio rotor.

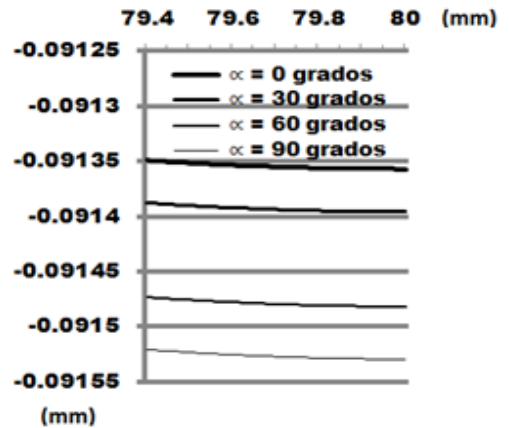


Figura 11. Deflexiones para media fisura.

3. Métodos experimentales

Con los resultados, analíticos y numéricos, de las deflexiones se obtiene el rango de rigidez del rotor así como su rango correspondiente de frecuencias de resonancia. La fisura fue modelada sin amortiguamiento por lo que la frecuencia de resonancia se aproxima a la frecuencia natural.

3.1. Método analítico

De los resultados obtenidos para las deflexiones en el rotor con fisura se determina analíticamente sus rangos de rigidez y de resonancia.

En la Figura 12 se muestra el rango de rigidez del rotor al variar el ángulo de orientación de la fisura.

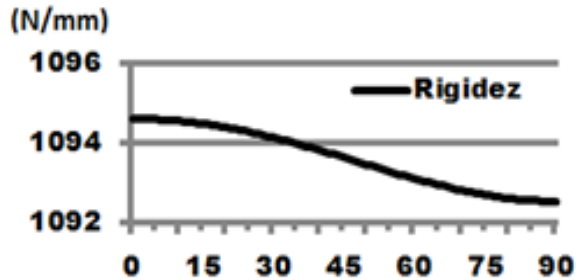


Figura 12. Rigidez en función de α grados.

En la Figura 13 se muestra el rango de frecuencia de resonancia del rotor al variar el ángulo de orientación de la fisura.

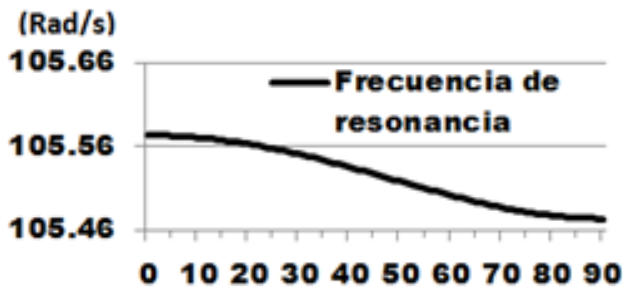


Figura 13. Frecuencia de resonancia en función de α grados.

3.2. Método numérico

La simulación numérica, ver Figura 14, se efectuó usando el software Inventor, elementos triangulares, soporte de oro (Módulo de Young 82.73 GPa, relación de Poisson 0.42), rotor de acero inoxidable (Módulo de Young 193 GPa, relación de Poisson 0.3), plano XY del rotor coincidiendo con el plano de simetría longitudinal del soporte, coincidiendo los planos transversales verticales de rotor y soporte, rotor tangente a la arista de la superficie (fija) del soporte donde apoya, análisis estático, resorte como tipo de contacto, la rigidez del acero inoxidable.



Figura 14. Sistema simulado numéricamente.

En la Figura 15 se muestra el rotor con su fisura en la orientación crítica $\alpha = 270^\circ$, para la cual se determinó una deflexión máxima de 0.1646 milímetros.

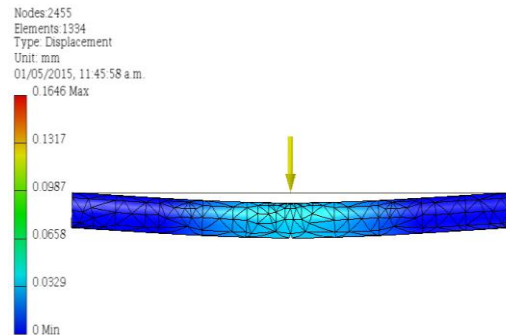


Figura 15. Deflexiones para $\alpha = 270^\circ$.

4. Resultados y discusión

Al no considerar la concentración de esfuerzos los resultados analíticos se aproximan, con menor exactitud, a los resultados reales.

Los resultados numéricos al considerar la concentración de esfuerzos se aproximan, con mayor exactitud, a los resultados reales.

4.1. Resultados

En las Tablas 1, 2, 3 y 4 se muestran los resultados obtenidos.

4.2. Discusión

Comparando los resultados de las Tablas 1 y 2 para $\alpha = 270^\circ$, la resonancia, analítica, en el rotor con fisura se presenta en un rango de 0.1 % por abajo de la resonancia del rotor sin fisura $0.999\omega_{rsf} \leq \omega_{rcf} < \omega_{rsf}$.

Tabla 1. Resultados analíticos sin fisura.

$\Delta (mm)$	$k \left(\frac{N}{mm} \right)$	$\omega \left(\frac{rad}{s} \right)$
0.09134359	1094.76757	105.580797

Tabla 2. Resultados analíticos con fisura.

α°	$\Delta (mm)$	$k \left(\frac{N}{mm} \right)$	$\omega \left(\frac{rad}{s} \right)$
0	0.09135695	1094.60749	105.573078
90	0.09152965	1092.54218	105.473433
180	0.09135695	1094.60749	105.573078
270	0.09152965	1092.54218	105.473433

Comparando los resultados de las Tablas 3 y 4 para $\alpha = 270^\circ$, la resonancia, numérica, en el rotor con fisura se presenta en un rango de 14.2 % por debajo de la resonancia del rotor sin fisura $0.858\omega_{rsf} \leq \omega_{rcf} < \omega_{rsf}$.

Tabla 3. Resultados numéricos sin fisura.

$\Delta (mm)$	$k \left(\frac{N}{mm} \right)$	$\omega \left(\frac{rad}{s} \right)$
0.1213	824.402308	91.6206935

Tabla 4. Resultados numéricos con fisura.

α°	$\Delta (mm)$	$k \left(\frac{N}{mm} \right)$	$\omega \left(\frac{rad}{s} \right)$
270	0.1646	607.533414	78.6518713

Al comparar los resultados de las Tablas 1 y 4 para $\alpha = 270^\circ$, la resonancia, numérica, en el rotor con fisura se presenta en un rango de 25.5 % por debajo de la resonancia, analítica, del rotor sin fisura $0.745\omega_{rsf} \leq \omega_{rcf} < \omega_{rsf}$.

En el método analítico la frecuencia de resonancia es la misma para $\alpha = 90^\circ$ y para $\alpha = 270^\circ$.

5. Conclusiones

Del análisis del rotor con fisura desde el punto de vista del segundo momento de área, con respecto al eje Z, variando en función del ángulo de orientación de la fisura (α) y de la coordenada x ; se concluye:

- Para el rotor sin y con fisura, desde las Tablas 1 y 2, analíticamente, $0.999\omega_{rsf} \leq \omega_{rcf} < \omega_{rsf}$.
- Para el rotor sin y con fisura, desde las Tablas 3 y 4, numéricamente, $0.858\omega_{rsf} \leq \omega_{rcf} < \omega_{rsf}$.
- Coincidiendo con J.W. Xiang and M. Liang, 2011 [9], con P. R. Baviskar and V. B. Tungikar, 2013 [10], y con A. D. Dimarogonas et al, 2013 [11]; una fisura puede ser detectada, monitoreando la resonancia en estado transitorio durante el paro y arranque de la máquina.

Las dos primeras conclusiones son ciertas para los valores definidos en el inciso 1.1 (Notación), la tercera conclusión es cierta de manera general. Una solución matemática de la Ec. 11 permitirá obtener conclusiones generales del

fenómeno analizado, cuyo comportamiento es no lineal.

$$\frac{d^2Y}{dx^2} = \left(\frac{0.5F}{E}\right) \frac{X}{I_{cf}} \quad \text{Ec. (11)}$$

6. Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo de la Universidad Autónoma Metropolitana y de la Unidad Azcapotzalco en general, así como de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería y del Departamento de Energía en particular.

7. Referencias

- [1] T. Morais, “Control of the breathing mechanism of a cracked rotor by using electro-magnetic actuator numerical study”. Latin American Journal of Solids and Structures, **3**, 2013.
- [2] H. Wu y S. Joseph, 2014, *Effects of crack types on the periodic stiffness for the transversely cracked shaft*, Byron Bay Australia, 23rd Australasian Conference on the Mechanics of Structures and Materials (ACMSM23).
- [3] P. R. Baviskar y V. B. Tungikar, 2011, “Analysis of crack in shaft of blower using Finite Element analysis and experimental technique”, www.arpapress.com/Volumes/Vol8Issue1/IJRRAS_8_1_05.pdf30, Vol. 8, No. 1, Julio, pages. 30 – 36.
- [4] Y. T. Sawicki, X. Wu, G. Y. Baaklinit y A. L. Qykenyesi, 2003, “Vibration-based crack diagnosis in rotating shaft during acceleration through resonance”, NDE and Health Monitoring of Aerospace materials and Composites II, Andrew L. Qykenyesi, Peter J. Shull, Editors, Proceeding of SPIE Vol. 5046.
- [5] G.Sabnavis, R. G. Kirk, M. Kasarda, D. Quinn, “Cracked shaft detection and diagnostics: a literature review”. Shock-Vibration Digest, 2004.
- [6] V. Kumar, C. Rastogi, “A brief review on dynamics of a cracked rotor”. International Journal of Rotating Machinery, 2009.
- [7] J. J. Sinou y A. W. Lees, 2005, “The influence of cracks in rotating shafts”, Journal of Sound and Vibration, Volume 285, Issues 4-5, 6 August, Pages 1015-1037.
- [8] Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston, Vector Mechanics for Engineers: Statics and Dynamics, McGraw-Hill, 2010.
- [9] J.W. Xiang and M. Liang, 2011, “Multiple Crack Identification Using Frequency Measurement”, International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering Vol: 5, No: 4, 2011, Pages 779-784.
- [10] P. R. Baviskar and V. B. Tungikar, “Multiple Cracks Assessment using Natural Frequency Measurement and Prediction of Crack Properties by Artificial Neural Network”, International Journal of Advanced Science and Technology Vol. 54, May, 2013, Pages 23-38.
- [11] A. D. Dimarogonas et al, *Analytical Methods in Rotor Dynamics, Mechanisms and machine*, Science 9, DOI: 10.1007/978-94-007-5905-3_7, Springer Science+Business Media Dordrecht, Capítulo 7 Identification of Cracks in Rotor and Other Structures, 2013, Pages 163-164.