



## Revista Internacional de Investigación e Innovación Tecnológica

Página principal: [www.riit.com.mx](http://www.riit.com.mx)

---

### Modelos de demanda de electricidad en tiempo continuo y en tiempo discreto Continuous-time and discrete-time electricity demand models

Arenas-López, J.P., Martínez-Martínez, J.L., Badaoui, M., Mota-Palomino, R.O.A.

Instituto Politécnico Nacional, México.

<https://orcid.org/0000-0001-8967-5677>; <https://orcid.org/0000-0002-0660-1654>; <https://orcid.org/0000-0002-1249-7742>; <https://orcid.org/0000-0003-1034-2357>.

[jarenasl0800@alumno.ipn.mx](mailto:jarenasl0800@alumno.ipn.mx); [jmartinezm1820@alumno.ipn.mx](mailto:jmartinezm1820@alumno.ipn.mx); [mbadaoui@ipn.mx](mailto:mbadaoui@ipn.mx); [rmotap@ipn.mx](mailto:rmotap@ipn.mx)

**Innovación tecnológica:** Modelado estocástico de la demanda de electricidad.

**Área de aplicación industrial:** Análisis de sistemas eléctricos de potencia.

Recibido: 30 marzo 2022

Aceptado: 07 octubre 2022

#### Abstract

In general, power systems are exposed to various sources of uncertainty, among which the behavior of electricity demand stands out. Although forecasting methodologies have traditionally been used to anticipate operational decisions, there are always variations that must be considered in order to assess their impact. The objective of this study is to show the performance of two methodologies for modelling the electricity demand of an electricity system from two approaches: one in continuous time and the other in discrete time, presenting their application to the modelling of the short-term electricity demand of the Mexican National Interconnected System. The continuous model is constructed as a combination of the Ornstein-Uhlenbeck process and a deterministic function, while the discrete model is obtained by means of an Integrated Autoregressive Double Seasonal Moving Average process. The results obtained show that the models adequately capture demand behavior and can provide information on possible scenario realizations according to the particular random characteristics of the data set.

**Keywords:** Electricity demand, time series, stochastic differential equations.

## Resumen

En general, los sistemas eléctricos de potencia se encuentran expuestos a diversas fuentes de incertidumbre, dentro de las cuales destaca el comportamiento de la demanda de electricidad. Si bien se ha recurrido tradicionalmente a metodologías de pronóstico para anticipar las decisiones operativas, siempre existen variaciones que deben ser consideradas para evaluar su impacto. El objetivo de este estudio es mostrar el desempeño de dos metodologías para el modelado de la demanda de electricidad de un sistema eléctrico a partir de dos enfoques: uno en tiempo continuo y otro en tiempo discreto, presentando su aplicación para el modelado de la demanda de electricidad de corto plazo del Sistema Interconectado Nacional Mexicano. El modelo continuo es construido como una combinación del proceso de Ornstein-Uhlenbeck y una función determinista, mientras que el modelo discreto es obtenido mediante un proceso Autorregresivo Integrado de Medias Móviles Doble Estacional. Los resultados obtenidos muestran que los modelos captan adecuadamente el comportamiento de la demanda y pueden brindar información sobre las posibles realizaciones de escenarios de acuerdo con las características aleatorias particulares del conjunto de datos.

**Palabras clave:** Demanda de electricidad, series de tiempo, ecuaciones diferenciales estocásticas.

## I. INTRODUCCIÓN

En la actualidad, la modernización de los sistemas eléctricos de potencia ha introducido muchas oportunidades en cuanto a su planificación, operación y control, pero también han provocado muchos retos en cuanto a la incertidumbre, la cual puede exponer a dichos sistemas a riesgos potenciales. En general, la incertidumbre en estos sistemas puede clasificarse en dos grupos: técnicos y económicos. El primer grupo abarca tanto la topología (equipo e infraestructura eléctrica) como el funcionamiento del sistema (crecimiento y variación de la demanda y producción de energía eléctrica), mientras que en el segundo grupo se encuentran fenómenos como las fluctuaciones en los precios del mercado eléctrico y de los combustibles, así como otras variables socioeconómicas [1].

Debido al impacto que pueden tener las fuentes de incertidumbre es necesario tomar decisiones precisas para decidir entre alternativas, calcular costos, esperar ingresos y mitigar posibles riesgos de forma segura y

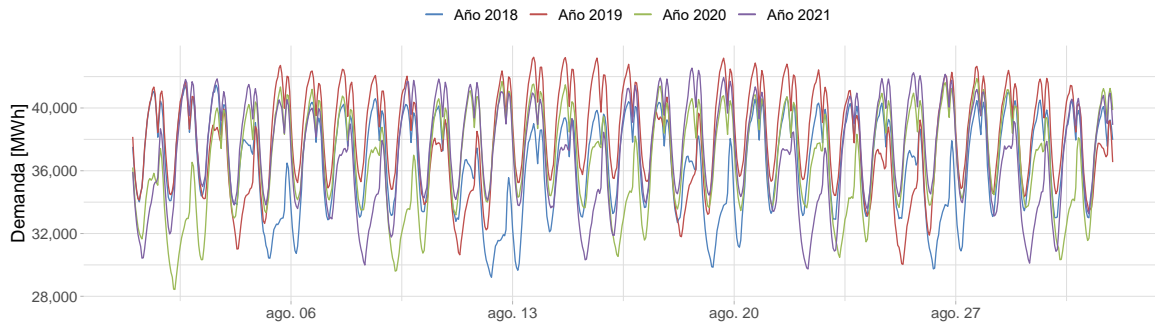
confiable. Para esto, se han desarrollado métodos de análisis y toma de decisiones bajo incertidumbre para examinar los posibles riesgos y consecuencias de todos los escenarios para cuantificar con precisión la importancia de las fuentes de incertidumbre en términos prácticos para ayudar a entender cómo estas pueden afectar el rendimiento de un determinado sistema [2], [3]. Es entonces que actualmente la representación de la incertidumbre en las variables que influyen en los procesos de análisis de la operación de los sistemas eléctricos se ha vuelto más relevante debido al comportamiento aleatorio que tienen estas variables y que impactan directamente en la operación [4], [5].

Tal como se ha mencionado, el consumo de electricidad es una fuente de incertidumbre y volatilidad, ya que su fluctuación está determinada por muchos factores tales como condiciones climáticas, hora (p. ej., picos diarios y estacionales), tipos de carga (p. ej., residencial, industrial, agrícola), precios de la electricidad, tasas de inflación, políticas energéticas, inmigración de población,

crecimiento de carga, etc. [6], [7]. Cada cambio probable en los factores anteriores y la aparición de eventos imprevistos afectan la cantidad de carga y el patrón de consumo.

Como ejemplo de la variación temporal y aleatoria del comportamiento de la demanda, en la Figura 1 se muestra la demanda de electricidad del Sistema Interconectado

Nacional (SIN) mexicano en intervalos horarios para el mes de agosto en distintos años obtenidos de [8]. En dicha Figura se puede observar que, aunque existe un comportamiento periódico diario y semanal similar entre observaciones, existen variaciones considerables en magnitud que pueden ser el resultado de la combinación de múltiples factores aleatorios.



**Figura 1.** Demanda horaria de electricidad en el SIN en el mes de agosto de 2018 a 2021.

En el ámbito de los sistemas eléctricos de potencia, el modelado del comportamiento de la demanda de electricidad no solo es necesario para el despacho económico y la planeación de la expansión del sistema, también es necesario para los estudios de control automático de generación, análisis de estabilidad, flujo de potencia, estimación de estado, etc. [6]. Si bien para los análisis a largo plazo la disponibilidad de una gran cantidad de datos históricos ha llevado a un pronóstico de demanda relativamente preciso, en estudios a corto plazo la aleatoriedad de las fluctuaciones estocásticas no puede anticiparse por completo. Uno de los enfoques más relevantes para el modelado de variaciones a corto plazo es, por tanto, a través de un proceso estocástico [9], el cual no es más que el conjunto de todas las trayectorias posibles que se pueden observar [10].

En la práctica, solo se dispone de una realización del proceso estocástico, la serie histórica. Así, para cada instante de tiempo

(día, mes, año, etc.), el proceso estocástico es una variable aleatoria. El valor observado en cualquier momento  $t$  (el valor de la serie histórica en el momento  $t$ ) no es más que el valor “muestreado” de la distribución de probabilidad asociada a la variable aleatoria del proceso estocástico en el momento  $t$  [10], [11].

Considerando lo anterior, este trabajo se centra en el modelado de la demanda de electricidad partiendo del hecho de que esta variable puede ser representada como un proceso estocástico. Este enfoque abre la posibilidad de considerar modelos de probabilidad hipotética en tiempo continuo y en tiempo discreto, cuyo análisis y construcción permiten capturar características específicas de la demanda. Por ejemplo, un modelo basado en tiempo discreto permite identificar el comportamiento de la demanda en intervalos horarios mientras que con un modelo en tiempo continuo es posible analizar la variación de la demanda entre dichos

intervalos que no es capturada por el modelo en tiempo discreto, por lo tanto, cada modelo puede tener aplicaciones específicas y no necesariamente son comparables en cuanto a desempeño.

Aunque existe una gran variedad de herramientas para estudiar el impacto de una perturbación estocástica como lo es la demanda de electricidad, diversos estudios han analizado el comportamiento dinámico de corto plazo de procesos estocásticos como la demanda de electricidad y han concluido que dicho comportamiento se puede modelar como un conjunto de ecuaciones diferenciales estocásticas [9], [12], mientras que, cuando existen componentes estacionales en los datos, es posible tratarlas mediante un modelo multiplicativo autorregresivo y de medias móviles [13], [14].

El objetivo de este trabajo es presentar dos modelos de demanda: uno en tiempo continuo basado en el proceso de Ornstein-Uhlenbeck y uno en tiempo discreto basado en el proceso Autorregresivo Integrado de Medias Móviles Doble Estacional (DSARIMA), los cuales permiten establecer un modelo de probabilidad hipotética para representar los datos y, a partir de este, generar escenarios sintéticos que pueden ser muestreados para ser empleados en diversos estudios de sistemas eléctricos según sus particularidades.

El resto de este trabajo está organizado de la siguiente manera. En las Secciones II y III se presentan los aspectos teóricos y metodológicos relacionados con el modelo DSARIMA y el proceso de Ornstein-Uhlenbeck, respectivamente. En la Sección IV se presenta un caso de estudio correspondiente a la demanda de electricidad en el SIN, luego de eso, se presentan los procedimientos de selección de los parámetros de los modelos planteados.

Finalmente, las conclusiones son presentadas en la Sección V.

## II. MODELO DISCRETO DE DEMANDA

### A. Proceso DSARIMA

Las series de tiempo de demanda de electricidad registradas en intervalos de 15, 30 y 60 minutos generalmente presentan más de un patrón estacional, ya que su comportamiento presenta similitudes periódicas entre las observaciones de cada día y de cada semana, por lo que un aspecto fundamental en el modelado de esta variable es su estacionalidad múltiple [15], [16]. En el análisis de series de tiempo, el modelo clásico de descomposición que incorpora los componentes de tendencia, estacionalidad y ruido aleatorio no siempre resulta práctico en el modelado de datos reales debido a que, por ejemplo, podría no ser razonable suponer que el componente de estacionalidad se repite exactamente de la misma forma entre ciclos.

La familia de modelos Autorregresivos y de Medias Móviles (ARMA) desarrollados por Box y Jenkins en 1976 para representar procesos estacionarios mediante la expresión lineal en términos de sus valores anteriores (modelo autorregresivo) y de valores actuales y anteriores de una serie de ruido blanco (modelo de medias móviles) ha sido extendida y generalizada para adaptarse a procesos no estacionarios mediante la diferenciación de una determinada serie de tiempo para eliminar su tendencia y estacionalidad obteniendo así una serie de tiempo con media y covarianzas invariables en el tiempo, dando lugar a los modelos ARIMA estacionales, los cuales permiten capturar la aleatoriedad en el patrón estacional de un ciclo al siguiente. Por lo tanto, el proceso DSARIMA constituye una extensión de la familia de procesos ARMA y dadas sus características es posible capturar el comportamiento periódico diario y semanal de una serie de tiempo de demanda de

electricidad  $X_t$  compuesta por  $n$  observaciones.

En general, si  $d$ ,  $D_1$  y  $D_2$  son enteros no negativos, entonces una serie de tiempo  $Y_t$  es un proceso DSARIMA( $p, d, q$ )  $\times$  ( $P_1, D_1, Q_1$ ) $_{s_1}$   $\times$  ( $P_2, D_2, Q_2$ ) $_{s_2}$  con ciclos estacionales  $s_1$  y  $s_2$  si la serie diferenciada  $W_t = \nabla^d \nabla_{s_1}^{D_1} \nabla_{s_2}^{D_2} Y_t$  es un proceso ARMA de media cero definido por la siguiente expresión [13]:

$$\begin{aligned} & \phi_p(B)\Phi_{P_1}(B^{s_1})\Omega_{P_2}(B^{s_2})(W_t \\ & - \mu_W) \\ & = \theta_q(B)\Theta_{Q_1}(B^{s_1})\Psi_{Q_2}(B^{s_2})\varepsilon_t \end{aligned} \quad (\text{Ec. 1})$$

Donde:

$B$  operador de retraso ( $B^j(Y_t) = Y_{t-j}$ )  
 $\nabla^d$  operador de diferencia de retraso  $d$  ( $\nabla^d(Y_t) = (1 - B)^d Y_t$ );  
 $\nabla_s^D$  operador de diferencia de retraso  $s$  ( $\nabla_s^D(Y_t) = (1 - B^s)^D Y_t$ );  
 $d$  y  $D$  órdenes de las diferenciaciones aplicadas a  $Y_t$  para eliminar su tendencia y estacionalidad respectivamente;  
 $\varepsilon_t$  ruido blanco con media cero y varianza  $\sigma^2$  ( $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ )  
 $\mu_W$  valor esperado de  $W_t$   
 $\phi, \Phi$  y  $\Omega$  funciones polinomiales de orden  $p, P_1$  y  $P_2$  respectivamente  
 $\theta, \Theta$  y  $\Psi$  funciones polinomiales de orden  $q, Q_1$  y  $Q_2$  respectivamente

Es importante mencionar que generalmente se asume que la serie  $Y_t$  tratada en la Ecuación 1 tiene una varianza constante [11], por lo que es común aplicar una transformación de Box-Cox para corregir anomalías como la heteroscedasticidad y la no normalidad de los datos. La familia paramétrica de transformaciones para una serie  $X_t$  está dada por [13]:

$$f_\lambda(X_t) = \begin{cases} \lambda^{-1}(X_t^\lambda - 1) & U_t \geq 0, \lambda > 0 \\ \ln X_t & U_t > 0, \lambda = 0 \end{cases} \quad (\text{Ec. 2})$$

Donde el parámetro  $\lambda$ , posiblemente un vector, define una transformación particular. En la práctica, si es necesaria una transformación de Box-Cox, suele darse el caso de que  $\lambda = 0$  o  $\lambda = 0.5$  es adecuado [11]. En el caso de la demanda de electricidad se puede considerar por practicidad que  $Y_t$  en la Ecuación 1 es la serie transformada  $Y_t = \ln X_t, t = 1, \dots, n$ .

### B. Identificación y estimación de parámetros

En general, el desarrollo de un modelo de la familia de procesos ARMA para describir la estructura de dependencia en una serie de tiempo observada generalmente se logra mejor mediante un procedimiento iterativo de tres etapas basado en la identificación, estimación y verificación de diagnóstico.

En la primera etapa no se dispone de una formulación precisa del problema, por lo tanto, los métodos de inspección gráfica son especialmente útiles para identificar los posibles órdenes del modelo [13]. En este sentido, la selección provisional de un modelo y sus respectivos órdenes se puede llevar a cabo mediante la inspección de la función de autocorrelación (FAC) muestral  $\hat{\rho}(h)$  y la función de autocorrelación parcial (FACP) muestral  $\hat{\alpha}(h)$  de la serie diferenciada  $W_t$  considerada en la Ecuación 1, las cuales pueden ser estimadas para cada retraso  $h$ , tal que  $-n < h < n$ , a partir de las siguientes expresiones [11]:

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)} \quad (\text{Ec. 3})$$

$$\hat{\alpha}(h) = \hat{\phi}_{hh} \quad (\text{Ec. 4})$$

Donde  $\hat{\gamma}(h)$  es la función de autocovarianza muestral dada por:

$$\hat{\gamma}(h) = n^{-1} \sum_{t=1}^{n-|h|} (y_{t+|h|} - \bar{y})(y_t - \bar{y}) \quad (\text{Ec. 5})$$

Siendo  $\bar{y}$  la media muestral  $\bar{y} = n^{-1} \sum_{t=1}^n y_t$ , mientras que  $\hat{\phi}_{hh}$  es el último componente de:

$$\hat{\phi}_h = \hat{\Gamma}_h^{-1} \hat{\gamma}_h \quad (\text{Ec. 6})$$

Donde

$$\hat{\Gamma}_h = [\hat{\gamma}(i-j)]_{i,j=1}^h \quad (\text{Ec. 7})$$

$$\hat{\gamma}_h = [\hat{\gamma}(1), \hat{\gamma}(2), \dots, \hat{\gamma}(h)]^T \quad (\text{Ec. 8})$$

La FAC y FACP proporcionan una medida útil del grado de dependencia entre los valores de una serie de tiempo en diferentes momentos, por ejemplo, si  $\hat{\rho}(h)$  es significativamente distinta de cero para  $0 \leq h \leq q$  y despreciable para  $h > q$ , entonces un polinomio  $\theta$  de orden  $q$  (posiblemente con algunos coeficientes iguales a cero) podría ser un buen candidato para el componente MA regular del modelo; de manera análoga se puede proceder con  $\hat{\alpha}(h)$  para identificar el orden  $p$  del polinomio  $\phi$  correspondiente al componente AR regular del modelo [13]. En el caso de  $\Phi$  y  $\theta$ , los órdenes  $P_1$  y  $Q_1$  pueden identificarse mediante la inspección de valores de  $\hat{\rho}(h)$  y  $\hat{\alpha}(h)$  para valores de  $h$  que son múltiplos enteros de  $s_1$ , mientras que en el caso de  $\Omega$  y  $\Psi$  se consideran valores de  $h$  que son múltiplos enteros de  $s_2$  para identificar los órdenes  $P_2$  y  $Q_2$ . En la práctica, dada una serie de tiempo de  $n_s$  datos, se suelen utilizar valores de  $\pm 1.96/\sqrt{n_s}$  como límites entre los cuales  $\hat{\rho}(h)$  y  $\hat{\alpha}(h)$  se consideran "despreciables", ya que 1.96 es el

cuantil de 0.975 de la distribución normal estándar [11].

En la etapa de estimación, los parámetros del modelo propuesto se determinan utilizando el método de momentos, mínimos cuadrados o máxima verosimilitud, para mayores detalles sobre los métodos mencionados se recomiendan las referencias [11] y [13]. Mientras que en la etapa de diagnóstico se verifica el modelo para garantizar que los residuos del modelo no están correlacionados, poseen una varianza constante y tienen una distribución aproximadamente normal. Cabe destacar que rara vez existe el "orden verdadero" de un modelo, ya que puede haber diversos candidatos que satisfacen la etapa de diagnóstico con propiedades similares, en este caso se puede recurrir a criterios de información tales como el de Akaike (AIC) o Bayes (BIC) los cuales consisten en funciones de penalización para la selección del modelo y por lo tanto permiten establecer un criterio para seleccionar aquel que tenga una menor penalización.

### C. Generación de escenarios

La metodología para la generación de escenarios a partir de un modelo ajustado para un conjunto de observaciones consiste básicamente en el muestreo de los términos de error a partir de su función de distribución. El procedimiento para generar  $K$  escenarios de demanda de electricidad de  $T$  intervalos se enlista a continuación:

---

**Establecer**  $\lambda, d, D_1, D_2, \hat{\mu}_W, \hat{\sigma}^2$  y los parámetros de las funciones  $\hat{\phi}, \hat{\Phi}, \hat{\Omega}, \hat{\theta}, \hat{\Theta}, \hat{\Psi}$

**Para**  $k = 1, 2, \dots, K$

**Para**  $t = 1, 2, \dots, T$

Generar aleatoriamente

$\varepsilon_{k,t} \sim \mathcal{N}(0, \hat{\sigma}^2)$

Evaluar la expresión descrita por la Ecuación 1 para obtener  $W_{k,t}$

Revertir las diferenciaciones  
para obtener  $Y_{k,t}$   
Revertir la transformación de  
Box-Cox para obtener  $X_{k,t}$   
**Fin Para**

**Fin Para**

### III. MODELO CONTINUO DE DEMANDA

#### A. Proceso de Ornstein-Uhlenbeck

Una ecuación diferencial estocástica (EDE) de Itô unidimensional en el intervalo de tiempo  $[0, T]$  tiene la siguiente forma:

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dM_t \quad (\text{Ec. 9})$$

Con la condición inicial  $X_0$ , donde las funciones  $a(t, X_t)$  y  $b(t, X_t)$  son los términos de deriva y difusión respectivamente, y  $M_t$  es un proceso de Wiener [17], [18]. El proceso estándar de Wiener es un proceso de difusión no estacionario con las siguientes características [17]:

- $M_0 = 0$ , con probabilidad 1.
- La función  $t \mapsto M_t$  es casi seguramente continua.
- Para  $0 \leq t_i < t_{i+1} \leq T$ , la variable aleatoria definida por los incrementos  $\Delta M_i = M_{t_{i+1}} - M_{t_i}$  es de distribución gaussiana con media cero y varianza  $\delta = t_{i+1} - t_i$ , es decir,  $\Delta M_i \sim \mathcal{N}(0, \delta)$ .
- Para  $0 \leq t_i < t_{i+1} < t_{i+2} \leq T$ , los incrementos no superpuestos  $\Delta M_i = M_{t_{i+1}} - M_{t_i}$  y  $\Delta M_{i+1} = M_{t_{i+2}} - M_{t_{i+1}}$  son independientes.

Una EDE puede verse como una ecuación diferencial ordinaria en la que se incluye un término adicional para modelar el comportamiento dinámico estocástico relacionado con la variable  $X_t$ . La forma integral equivalente de la Ecuación 9 está dada por:

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dM_s \quad (\text{Ec. 10})$$

Donde la primera integral es una integral ordinaria de Riemann-Stieltjes y la segunda está definida en el sentido de Itô.

Sea  $\alpha, \theta > 0$ , entonces el proceso de Ornstein-Uhlenbeck (OU) se define como la solución de la siguiente EDE:

$$dU_t = -\alpha U_t dt + \theta dM_t \quad (\text{Ec. 11})$$

Por una aplicación del Lema de Itô a la función real  $f(t, U_t) = U_t e^{\alpha t}$ , se obtiene la siguiente solución cerrada:

$$U_t = U_0 e^{-\alpha t} + \theta \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dM_s \quad (\text{Ec. 12})$$

Que se conoce como el proceso de OU. El proceso resultante tiene las siguientes propiedades estadísticas de esperanza y varianza [18]:

$$\mathbb{E}[U_t] = \mathbb{E}[U_0]e^{-\alpha t} \quad (\text{Ec. 13})$$

$$\mathbb{V}[U_t] = \left( \mathbb{V}[U_0] - \frac{\theta^2}{2\alpha} \right) e^{-2\alpha t} + \frac{\theta^2}{2\alpha} \quad (\text{Ec. 14})$$

De las Ecuaciones 13 y 14, se concluye que si  $U_0 \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\theta^2}{2\alpha}\right)$ , entonces  $U_t$  es un proceso Gaussiano estacionario con la misma distribución que  $U_0$ .

#### B. Simulación del proceso de OU

De acuerdo con [19], el cálculo determinista es mucho más robusto que el estocástico por lo que es necesario tener cierto cuidado al

derivar esquemas numéricos para las EDEs de Itô para asegurar que son consistentes con el cálculo de Itô. Una de las aproximaciones discretas en el tiempo más sencillas de un proceso Itô es el método de Euler también denominado método de Euler-Maruyama. Se considera un proceso de Itô  $X = \{X_t, t_0 \leq t \leq T\}$  que satisface la Ecuación 9 en  $t_0 \leq t \leq T$  con el valor inicial  $X_{t_0} = X_0$ .

Por simplicidad se considera una discretización,  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_N = T$  en un intervalo  $[t_0, T]$  con incremento  $\delta = t_{n+1} - t_n = T/N$ , donde  $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ , el método de Euler está dado por [20]:

$$X_{n+1} = X_n + a(t_n, X_n)\delta + b(t_n, X_n)\Delta M_n \quad (\text{Ec. 15})$$

Donde

$$\Delta M_n = M_{t_{n+1}} - M_{t_n} \quad (\text{Ec. 16})$$

De la sección anterior se sabe que estos incrementos son variables aleatorias gaussianas independientes con media

$$\mathbb{E}[\Delta M_n] = 0 \quad (\text{Ec. 17})$$

y varianza

$$\mathbb{E}[(\Delta M_n)^2] = \delta \quad (\text{Ec. 18})$$

En particular, mediante una aplicación del esquema numérico dado por la Ecuación 15 a la Ecuación 11 se obtiene la siguiente expresión:

$$U_{n+1} = U_n - \alpha U_n \delta + \theta \Delta M_n \quad (\text{Ec. 19})$$

### C. Construcción del modelo

El proceso estocástico  $Z_t$ , es el modelo matemático de la demanda de electricidad y se construye como resultado de una perturbación

de la demanda media por medio de la Ecuación 11 [21]:

$$Z_t = m_t + U_t \quad (\text{Ec. 20})$$

Donde

$$m_t := \begin{cases} \xi_1(t) & \text{si } 0 \leq t \leq \tau, \\ \xi_2(t) & \text{si } \tau \leq t \leq 2\tau, \\ \vdots & \\ \xi_p(t) & \text{si } (p-1)\tau \leq t \leq p\tau, \end{cases} \quad (\text{Ec. 21})$$

$$\xi_{k+1}(t) = c_k(t - k\tau) + d_k, \quad \forall k = 0, \dots, p-1 \quad (\text{Ec. 22})$$

Donde  $p$  es el número de períodos formados a partir de las demandas medias y  $\tau$  es el periodo de duración entre las mediciones de la demanda media,  $c_k$  y  $d_k$  son constantes. La interpretación de los parámetros  $c_k$  y  $d_k$  es la siguiente:  $d_k$  es la demanda media al comienzo del periodo  $k$  y  $c_k$  es la pendiente de la línea recta  $\xi_{k+1}$  que va desde la demanda media al comienzo del periodo  $k$  a la demanda media al comienzo de punto  $k + 1$ .

Debido al teorema limite central y suponiendo que se tiene una gran cantidad de cargas, parece razonable suponer que la distribución de las diferencias de carga entre diferentes tiempos pueda ser bien aproximada por una distribución normal. El procedimiento para generar  $K$  escenarios de demanda de electricidad en tiempo continuo de  $p$  períodos, se enlista a continuación:

---

**Establecer**  $\mathbf{d}, K, n, \alpha, \theta$

$p \leftarrow$  (Número de elementos de  $\mathbf{d}$ )  $- 1$

$\delta \leftarrow p/N$

Construir  $m_t$  a partir de  $\mathbf{d}$  y las Ecuaciones 21 y 22

**Para**  $i = 1, 2, \dots, K$

    Generar aleatoriamente

$U_{i,0} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\theta^2}{2\alpha}\right)$



**Para**  $t = \delta, 2\delta, \dots, p$

Generar la simulación del proceso  $U_{i,t}$  mediante la Ecuación 19

**Fin Para**

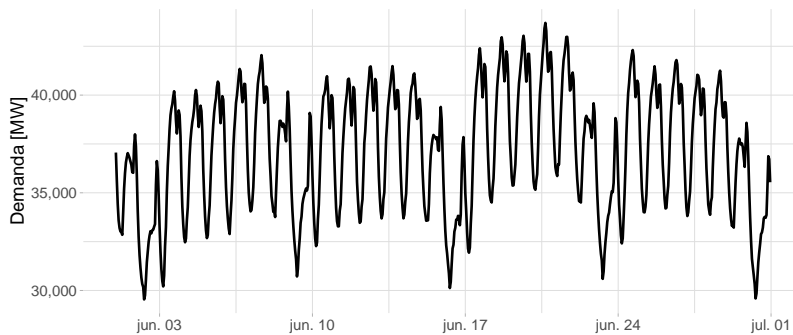
Obtener el proceso  $Z_{i,t}$  por medio de la Ecuación 20

**Fin Para**

#### IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La aplicación de los modelos presentados es ilustrada para el caso de la demanda eléctrica

en el SIN, particularmente para generar un conjunto de posibles escenarios de demanda eléctrica del 20 de junio de 2019, día en el cual se presentó la ocurrencia de la demanda máxima registrada en dicho año (43696 MW). Para este análisis se consideraron los datos de demanda eléctrica del SIN registrados en intervalos de una hora, los cuales se encuentran disponibles en [8]. La demanda horaria en el mes de junio de 2019 se muestra en la Figura 2.

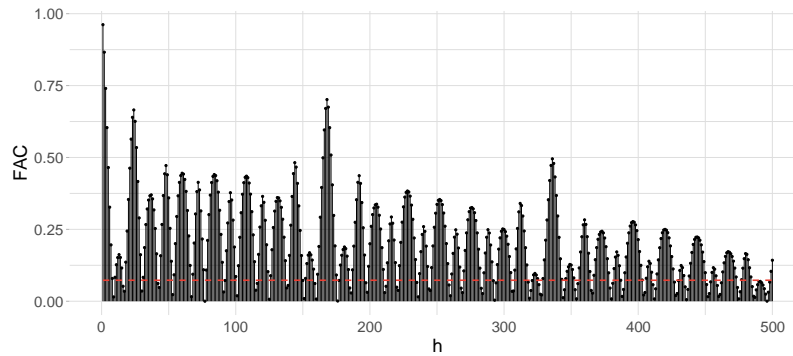


**Figura 2.** Demanda horaria del mes de junio de 2019.

##### A. Modelo discreto de demanda

Para el ajuste de un modelo que permitiera generar múltiples escenarios posibles de demanda para el caso de estudio se consideró el conjunto de datos correspondientes a la demanda horaria registrada en el mes de junio, por lo que la serie  $X_t$  en cuestión se compone de 720 observaciones tal como se mostró en la Figura 2. Si bien la periodicidad de la serie  $X_t$  puede resultar evidente mediante la observación de su comportamiento, es necesario identificar con mayor precisión los ciclos estacionales para aplicar adecuadamente diferenciaciones requeridas con el fin de obtener una serie estacional en apariencia.

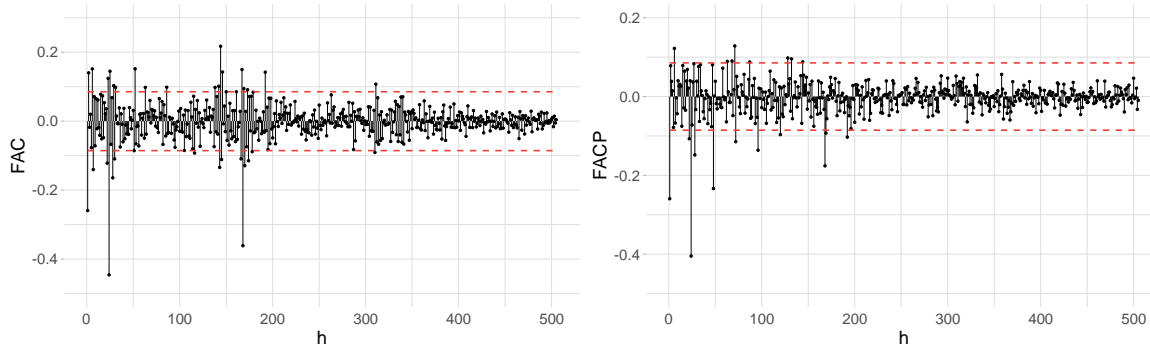
En la Figura 3 se muestra el valor absoluto de la FAC ( $|\hat{\rho}(h)|$ ) de la serie  $X_t$  para retrasos  $h = 1, \dots, 500$  (en este y en los casos subsecuentes se omite el caso en que  $h = 0$  ya que, por definición,  $\hat{\rho}(0) = 1$ ) considerando un límite de  $1.96/\sqrt{720}$ . Como puede observarse, la FAC presenta un doble comportamiento periódico para múltiplos de 24 y 168, además de un decaimiento lento conforme  $h$  incrementa, por lo tanto, se tiene un indicio de la necesidad de diferenciación de la serie  $X_t$  para poder ser representada como un proceso estacionario.



**Figura 3.** Valor absoluto de la FAC de la serie  $X_t$

La obtención de la serie estacionaria  $W_t$  descrita en la Ecuación 1 se obtiene entonces transformando primero la serie  $X_t$  aplicando el logaritmo natural a los datos ( $\lambda = 0$  en la Ecuación 2), de este modo se obtiene la serie  $Y_t = \ln(X_t)$ ,  $t = 1, \dots, 720$ , la cual es diferenciada considerando  $s_1 = 24$ ,  $s_2 = 24 \times 7 = 168$  y  $d = D_1 = D_2 = 1$ .

Posteriormente es necesario seleccionar los órdenes de las funciones polinomiales del modelo a partir de la inspección de la FAC y FACP de la serie  $W_t - \mu_W$ , las cuales son mostradas en la Figura 4 junto con los respectivos límites (considerando  $n_s = 527$  debido a la pérdida de datos debida a las diferenciaciones).

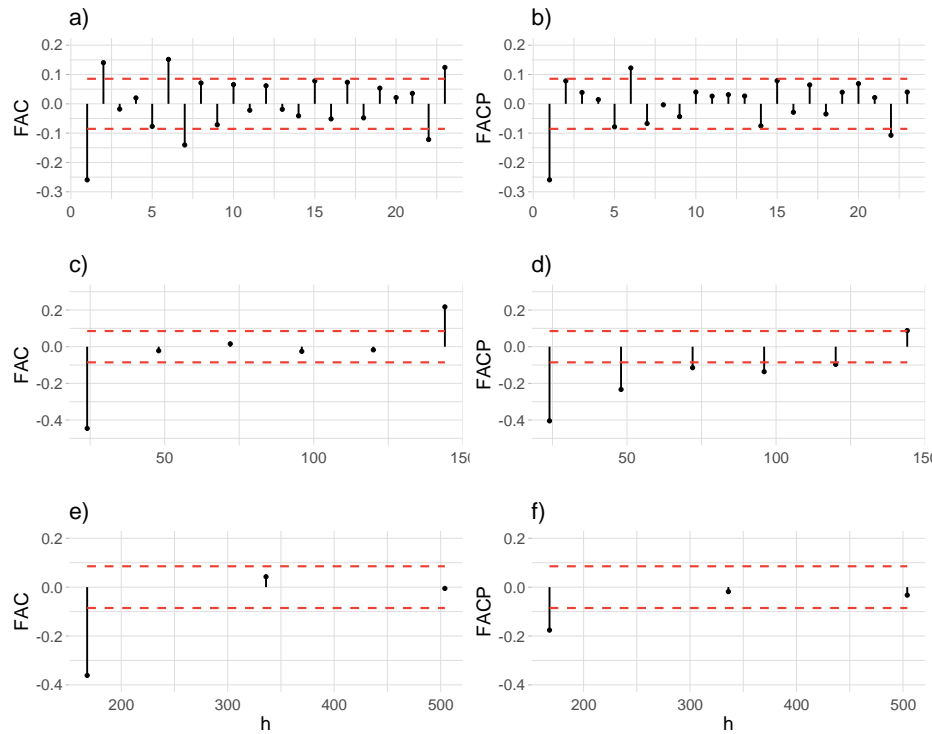


**Figura 4.** FAC y FACP de la serie  $W_t - \mu_W$ .

Ya que los órdenes de las funciones polinomiales deben ser definidos tanto para los periodos entre horas como para los estacionales, resulta conveniente agrupar los datos de la Figura 4 para cada parte del modelo tal como se muestra en la Figura 5, donde los incisos a) y b) muestran la FAC y FACP, respectivamente, correspondientes a la parte regular del modelo (periodos entre horas); los incisos c) y d) muestran las funciones de la primera parte estacional del modelo, cuyos valores corresponden a los múltiplos de  $s_1$ ; de manera análoga, en los

incisos e) y f) se muestran las funciones de la segunda parte estacional del modelo tomando como referencia los múltiplos de  $s_2$ .

Teniendo en cuenta lo anterior, se establece el grupo de modelos candidatos enlistado en la Tabla 1, los cuales son ingresados al software Statistical Analysis System (SAS) para estimar sus respectivos parámetros empleando el método de Máxima Verosimilitud, así como los valores de los estadísticos AIC y BIC.



**Figura 5.** FAC y FACP regular y estacionales de la serie  $W_t - \mu_W$ .

Teniendo en cuenta lo anterior y buscando preservar el principio de parsimonia para no sobre ajustar el modelo, se establece el grupo de modelos candidatos enlistado en la Tabla 1, los cuales son ingresados al software

Statistical Analysis System (SAS) para estimar sus respectivos parámetros empleando el método de Máxima Verosimilitud, así como los valores de los estadísticos AIC y BIC.

**Tabla 1.** Comparación de estadísticos AIC y BIC de los modelos candidatos.

Candidato	Modelo	AIC	BIC
1	$(6,1,2) \times (1,1,1)_{24} \times (1,1,1)_{168}$	-4031.58	-3997.44
2	$(6,1,2) \times (1,1,1)_{24} \times (0,1,1)_{168}$	-4033.57	-4003.7
3	$(6,1,2) \times (0,1,1)_{24} \times (1,1,1)_{168}$	-4031.97	-4002.1
4	$(6,1,2) \times (0,1,1)_{24} \times (0,1,1)_{168}$	-4033.95	-4008.35
5	$(6,1,1) \times (1,1,1)_{24} \times (1,1,1)_{168}$	-4033.57	-4003.7
6	$(6,1,1) \times (1,1,1)_{24} \times (0,1,1)_{168}$	-4035.57	-4009.96
7	$(6,1,1) \times (0,1,1)_{24} \times (1,1,1)_{168}$	-4033.94	-4008.34
8	$(6,1,1) \times (0,1,1)_{24} \times (0,1,1)_{168}$	-4035.92	-4014.58

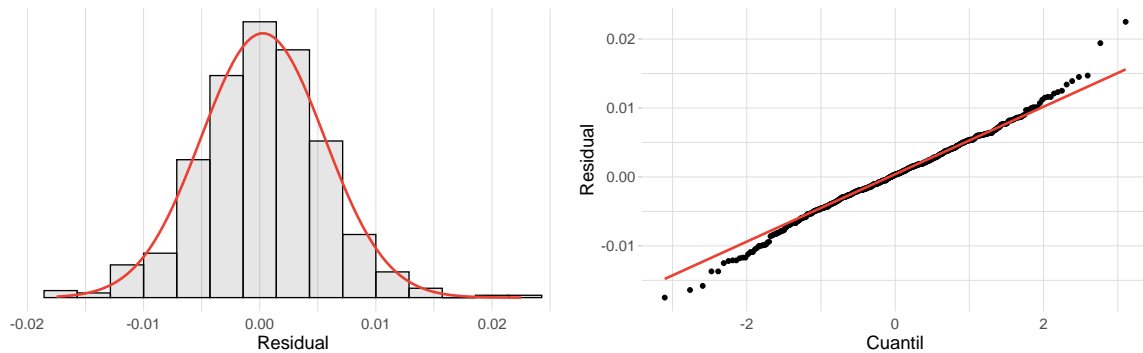
De acuerdo con los resultados obtenidos se puede observar que el octavo candidato presenta los menores valores de penalización, por lo que puede ser considerado el más adecuado para este caso. Los valores estimados de los parámetros del modelo ajustado son enlistados en la Tabla 2. Cabe destacar que, aunque  $p = 6$ , no significa que

el resto de los valores de los parámetros deben ser estimados, ya que, como se observó en la Figura 5b, sus valores no son significativamente distintos de cero. Por otra parte, en la Figura 6 se muestra el histograma de los residuos del modelo ajustado y su respectiva gráfico QQ normal, en estos se

puede observar que los residuos tienen una distribución aproximadamente normal.

**Tabla 2.** Parámetros del modelo ajustado.

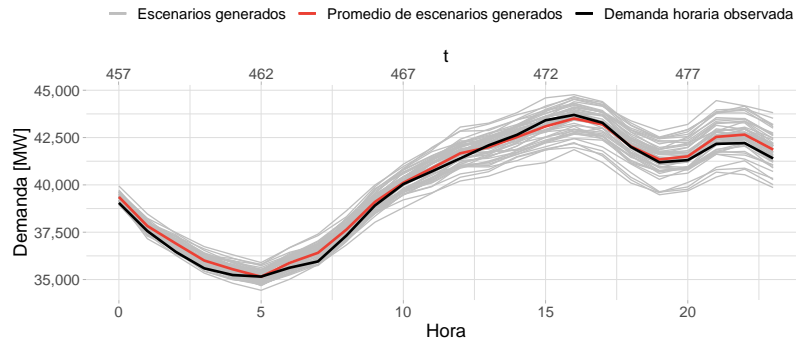
Parámetro	Valor
$\hat{\mu}_w$	-0.00012813
$\hat{\phi}_1$	-0.39609035
$\hat{\phi}_6$	0.07292223
$\hat{\theta}_1$	-0.25696351
$\hat{\theta}_1$	0.75214396
$\hat{\Psi}_1$	0.76424297
$\hat{\sigma}^2$	0.00002051



**Figura 6.** Distribución y gráfico QQ normal de los residuos del modelo ajustado.

A partir del modelo ajustado y considerando las observaciones previas a  $t = 457$  se generaron 50 escenarios sintéticos de demanda para el día analizado que representan algunas de las posibles realizaciones de la serie  $X_t$  para  $t = 457, 458, \dots, 480$  las cuales se muestran en la Figura 7. Como puede observarse, los escenarios generados siguen adecuadamente el comportamiento de la demanda observada, pero presentan variaciones que se acentúan debido al efecto acumulado de la incertidumbre en cada observación, lo que permite comparar el valor observado de demanda máxima presentado a

las 16:00 horas ( $t = 473$ ) con otras posibles realizaciones para la misma hora. Por ejemplo, dados los escenarios generados se puede identificar que la demanda pudo ser 1069 MW mayor que la observada e incluso 1836 MW menor, no obstante, es posible generar una gran cantidad de escenarios sintéticos para así obtener una estimación de la probabilidad de que la demanda sea mayor o menor que un determinado valor. Un aspecto adicional es que el valor medio horario de los escenarios de demanda generados sigue un patrón muy similar al del escenario de demanda observado.

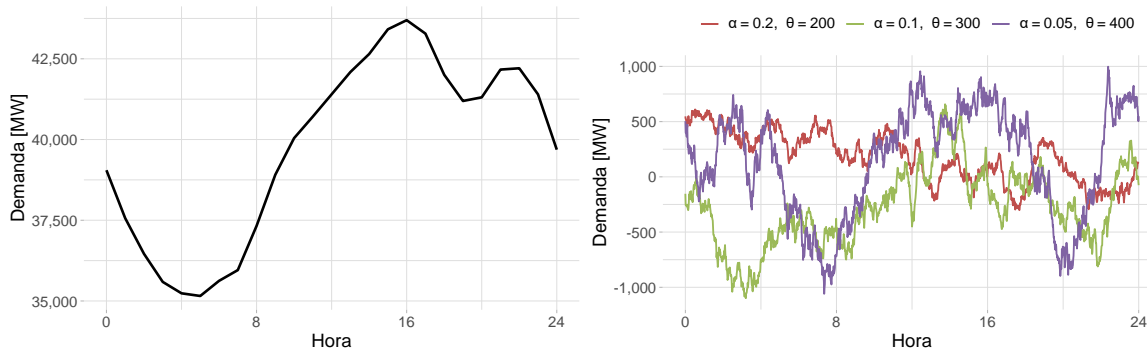


**Figura 7.** Escenarios de demanda horaria generados.

**B. Modelo continuo de demanda**

Para el modelo de demanda de electricidad continuo, se considera como demanda media, es decir,  $m_t$  de la Ecuación 20, la función por partes construida a partir de las Ecuaciones 21 y 22 con los datos de la demanda horaria del día 20 de junio de 2019 del SIN la cual ilustra a la izquierda de la Figura 8. Debido a que en este caso no se cuenta con datos para la estimación de los parámetros  $\alpha$  y  $\theta$  del proceso de OU, es decir, datos de las

fluctuaciones de demanda dentro de los intervalos horarios, a la derecha de la Figura 8 se ilustran tres trayectorias del proceso de OU simulado mediante esquema numérico dado por la Ecuación 19 con  $n = 1440$ , un paso de integración en el tiempo  $\delta = 1/60$ , y cuyo punto de partida de cada simulación,  $U_0$ , es una variable aleatoria con distribución  $\mathcal{N}(0, \theta^2/2\alpha)$ , con lo que se obtienen simulaciones de la fluctuación de la demanda de electricidad del SIN en cada minuto del día.

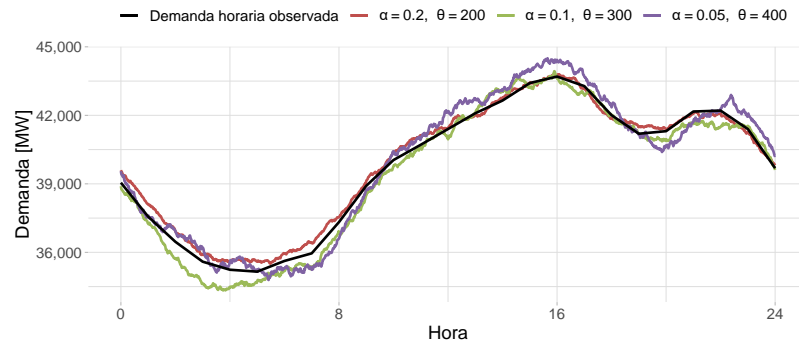


**Figura 8.** Componentes deterministas y estocásticas del modelo de demanda continuo.

Es claro que la varianza del proceso de OU dependerá de los parámetros  $\alpha$  y  $\theta$  tal como se describió anteriormente, lo cual explica las diferencias significativas entre los procesos simulados. Por otro lado, para ejemplificar el desempeño del modelo, en la Figura 9, se ilustra el resultado de las sumas de las

componentes determinista y estocásticas de acuerdo con la Ecuación 20 presentadas en la Figura 8.

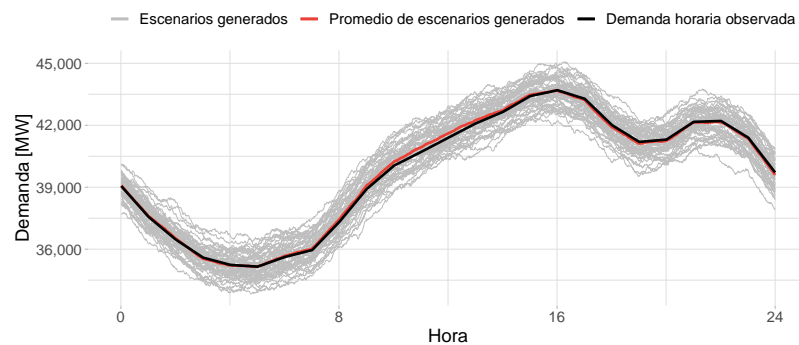
Se puede observar que las simulaciones de la demanda continua siguen un comportamiento similar al de los datos empíricos.



**Figura 9.** Tres realizaciones de la demanda en intervalos de un minuto utilizando el modelo propuesto.

Con el objetivo de mostrar el desempeño del modelo continuo, en la figura 10 se muestra un conjunto de 50 simulaciones de escenarios de demanda en intervalos de un minuto con parámetros de  $\alpha$  y  $\theta$  de 0.1 y 300

respectivamente. Se destaca que la variabilidad intrahoraria se mantiene constante para todo el periodo de simulación, a diferencia de los escenarios generados con el modelo discreto.



**Figura 10.** Escenarios generados de demanda en intervalos de un minuto.

Cabe resaltar que para un modelado de la demanda continuo más preciso, los parámetros del proceso de OU podrían variar para cada periodo de tiempo, esto debido a que, por ejemplo, en la noche las fluctuaciones podrían tender a ser más pequeñas que durante el día. Encontrar el proceso de OU que corresponde a la demanda en ciertos intervalos de tiempo, es decir, la estimación de  $\alpha$  y  $\theta$ , no es un problema, ya que en [22] se aborda esta cuestión. Finalmente, las simulaciones pueden ser configuradas para cualquier paso de integración en el tiempo  $\delta$ , lo que lo hace muy versátil para modelar la demanda de electricidad en cualquier escala de tiempo a partir de demandas medias.

## V. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentaron dos modelos de demanda de electricidad basados en procesos estocásticos abordados a partir de un modelo en tiempo continuo y un modelo en tiempo discreto. Para el caso del modelo en tiempo continuo se consideró que este podía ser representado mediante ecuaciones diferenciales estocásticas, por lo que se planteó la aplicación del proceso de Ornstein-Uhlenbeck para este propósito, mientras que para el caso del modelo en tiempo discreto se recurrió al proceso Autorregresivo Integrado de Medias Móviles Doble Estacional.

A través del ajuste de ambos modelos al caso de la demanda de electricidad en el Sistema Interconectado Nacional de México se pudo observar que ambos modelos permiten establecer una descripción compacta de los datos que es capaz de capturar y representar tanto el comportamiento determinista de la demanda como las fluctuaciones aleatorias que este fenómeno presenta en el corto plazo, ya que los escenarios sintéticos generados a partir de los modelos ajustados siguen adecuadamente el comportamiento horario de la variable observada. De este modo se deduce que ambos modelos pueden ser empleados en diversos estudios en el ámbito del análisis de sistemas eléctricos de potencia ajustando los modelos a conjuntos de datos específicos.

Es importante destacar que el modelo en tiempo discreto presentado no es capaz de capturar las variaciones intrahorarias que pueden presentarse, por lo que el modelo en tiempo continuo puede resultar de gran utilidad para estudios eléctricos de estabilidad dinámica, mientras que el modelo en tiempo discreto puede ser más apropiado para estudios de planeación operativa de corto plazo. En este sentido se deduce que los modelos no pueden ser directamente comparados, ya que su uso o aplicación deberá estar determinada por el tipo de análisis para el cual serán empleados.

## REFERENCIAS

- [1] A. Zobaa and S. Abdel Aleem, *Uncertainties in modern power systems*. San Diego, CA: Academic Press, 2021.
- [2] S. Ismael, S. Abdel Aleem, A. Abdelaziz and A. Zobaa, "State-of-the-art of hosting capacity in modern power systems with distributed generation", *Renewable Energy*, vol. 130, pp. 1002-1020, 2019. DOI: 10.1016/j.renene.2018.07.008.
- [3] A. Zobaa, S. Abdel Aleem and A. Abdelaziz, *Classical and Recent Aspects of Power System Optimization*. Academic Press, 2018.
- [4] I. Shah, H. Iftikhar, S. Ali and D. Wang, "Short-Term Electricity Demand Forecasting Using Components Estimation Technique", *Energies*, vol. 12, no. 13, p. 2532, 2019. DOI: 10.3390/en12132532.
- [5] R. Swief, N. El-Amery and M. Kamh, "Optimal Energy Management Integrating Plug in Hybrid Vehicle Under Load and Renewable Uncertainties", *IEEE Access*, vol. 8, pp. 176895-176904, 2020. DOI: 10.1109/access.2020.3026450.
- [6] Z. Dai and J. Tate, "A Data-Driven Load Fluctuation Model for Multi-Region Power Systems", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 34, no. 3, pp. 2152-2159, 2019. DOI: 10.1109/tpwrs.2018.2882560.
- [7] M. Mahdavi, H. Alhelou and M. Hesamzadeh, "An Efficient Stochastic Reconfiguration Model for Distribution Systems with Uncertain Loads", *IEEE Access*, vol. 10, pp. 10640-10652, 2022. DOI: 10.1109/access.2022.3144665.
- [8] Iniciativa Climática de México "OBTRENMEX", Junio 2021. [En línea] Disponible: <https://obtrenmx.org/>. [Acceso: Junio 2021]
- [9] M. Adeen and F. Milano, "On the Dynamic Coupling of the Autocorrelation of Stochastic Processes and the Standard Deviation of the Trajectories of Power System Variables", 2021 IEEE Power & Energy Society General Meeting (PESGM), 2021. DOI: 10.1109/pesgm46819.2021.9637935.
- [10] D. Dias, M. Maceira, J. Machado, F. Treistman and H. Santarém, "Modelo de Geração de Séries Sintéticas de Energias e Vazões", Centro de Pesquisas de Energia Elétrica (CEPEL), Rio de Janeiro, 2018.

- [11] P. J. Brockwell, R. A. Davis, *Introduction to Time Series and Forecasting*, 3a ed., Springer, 2016.
- [12] M. Adeen and F. Milano, "On the Impact of Auto-Correlation of Stochastic Processes on the Transient Behavior of Power Systems", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 36, no. 5, pp. 4832-4835, 2021. DOI: 10.1109/tpwrs.2021.3068038.
- [13] G. E. P. Box, G. M. Jenkins, G. C. Reinsel, G. M. Ljung, *Time series analysis: forecasting and control*, 5a ed., John Wiley & Sons, 2015.
- [14] Q. Zhao, W. Liao, S. Wang and J. Radhakrishna Pillai, "Robust Voltage Control Considering Uncertainties of Renewable Energies and Loads via Improved Generative Adversarial Network", *Journal of Modern Power Systems and Clean Energy*, vol. 8, no. 6, pp. 1104-1114, 2020. DOI: 10.35833/mpce.2020.000210.
- [15] S. Dinata, M. Azka, M. Faisal, Suhartono, R. Yendra and M. Gamal, "Short-Term load forecasting double seasonal ARIMA methods: An evaluation based on Mahakam-East Kalimantan data", *The 4th Indoms International Conference on Mathematics and its Application (IICMA 2019)*, 2020. DOI: 10.1063/5.0017643.
- [16] R. Permata, D. Prastyo and Wibawati, "Hybrid dynamic harmonic regression with calendar variation for Turkey short-term electricity load forecasting", *Procedia Computer Science*, vol. 197, pp. 25-33, 2022. DOI: 10.1016/j.procs.2021.12.114.
- [17] G. M. Jónsdóttir, F. Milano, "Data-based continuous wind speed models with arbitrary probability distribution and autocorrelation", *Renewable Energy*, vol. 143, pp. 368-376, Aug. 2019. DOI: 10.1016/j.renene.2019.04.158.
- [18] J. P. Arenas-López, M. Badaoui, "Stochastic modelling of wind speeds based on turbulence intensity", *Renewable Energy*, vol. 155, pp. 10-22, Aug. 2020. DOI: 10.1016/j.renene.2020.03.104.
- [19] S. Cyganowski, P. Kloeden, J. Ombach, *From Elementary Probability to Stochastic Differential Equations with MAPLE*, Springer, 2002. DOI: 10.1007/978-3-642-56144-3.
- [20] M. Bayram, T. Partal, G. Orucova Buyukoz, "Numerical methods for simulation of stochastic differential equations", *Advances in Difference Equations*, no. 17, 2018. DOI: 10.1186/s13662-018-1466-5.
- [21] M. Perninge, M. Amelin, V. Knazkins, "Load modeling using the Ornstein-Uhlenbeck process", in *IEEE 2nd International Power and Energy Conference (PECON 2008)*, pp. 819-821, Dec. 2008. DOI: 10.1109/PECON.2008.4762586.
- [22] A. Loukatou, S. Howell, P. Johnson, P. Duck, "Stochastic wind speed modelling for estimation of expected wind power output", *Applied Energy*, vol. 228, pp. 1328-1340, Oct. 2018. DOI: 10.1016/j.apenergy.2018.06.117.