



Revista Internacional de Investigación e Innovación Tecnológica

Página principal: www.riit.com.mx

Costo mínimo para zapatas combinadas trapezoidales de concreto reforzado apoyadas sobre el terreno

Minimum cost for reinforced concrete trapezoidal combined footings resting on the ground

Luévanos-Rojas, A.^a, Barquero-Cabrero, J.D.^b, López-Chavarría, S.^a, Medina-Elizondo, M.^a,
Vela-Moreno, V.B.^a, Barraza-Saucedo, R.^a

^a Universidad Autónoma de Coahuila, Unidad Torreón, Blvd. Revolución No, 151 Ote, CP 27000, Torreón, Coahuila, México.

^b Universidad de Barcelona, Calle Girona No, 24, CP 08010, Barcelona, España.
arnulfol_2007@hotmail.com; jd.barquero@eserp.com; sandylopez5@hotmail.com;
drmanuelmedina@yahoo.com.mx; e210204v@hotmail.com; rogelio.barraza.s@gmail.com

Innovación tecnológica: Modelo matemático para obtener el costo mínimo para zapatas combinadas trapezoidales de concreto reforzado en cimentaciones poco profundas.

Área de aplicación industrial: Sector de la construcción: empresas dedicadas al cálculo estructural donde se requiere minimizar los costos de los materiales utilizados como el concreto y el acero de refuerzo.

Recibido: 08 marzo 2021

Aceptado: 04 febrero 2022

Abstract

Optimal mathematical models have a direct impact on the administration of human and material resources used to produce any product, since they present the best solution for any problem, and thus make the optimal decision. This paper presents two optimal models for trapezoidal combined footings that support an axial load and two moments on the X and Y axes due to each column: the first model shows the minimum contact surface on the ground and the second model shows the minimum design cost to obtain the thickness, the percentages and the areas of reinforcing steel of the footing. The present investigation considers that the soil behaves elastically and the footing as a rigid body, therefore they comply with the biaxial bending equation, i.e., the pressure diagram shows a linear variation, and the equations are presented in terms of a concentric load and moments on the X and Y axes applied to each column. The methodology is developed under the concept that the integral of the shear force is the moment.

The design parameters and constraint functions for the two models take into account the American Concrete Institute building code requirements for structural concrete. A flow chart is presented to obtain the minimum cost of a reinforced concrete trapezoidal combined footing using Maple software. Four examples for structural calculation are presented to obtain the minimum area and minimum cost of a trapezoidal combination footing: Case 1 for free opposite sides in the direction of the Y axis, Case 2 for a limited side in column 1 in the direction of the Y axis, Case 3 for a limited side in column 2 in the direction of the Y axis, Case 4 for limited sides in column 1 and 2 in the Y axis direction. Current models consider that the resultant force of all forces and moments is located at the center of gravity on the transverse axis of the area of the footing, and takes into account one case (Case 2: the footing is limited to a property line on the side of the heaviest load). The models presented in this work could be used for the design of rectangular combined footings taking into account the transverse length of the uniform footing, and also for different codes of reinforced concrete design, simply modifying the equations of the resistance capacities for the moment, for the bending shear and for the punching shear, according to each one of the codes.

Keywords: minimum area, minimum cost, optimal models, trapezoidal combined footings.

Resumen

Los modelos matemáticos óptimos impactan directamente en la administración de recursos humanos y materiales empleados para elaborar cualquier producto, ya que presentan la mejor solución para cualquier problema, y así tomar la decisión óptima. Este artículo presenta dos modelos óptimos para zapatas combinadas trapezoidales descansando sobre el suelo que soportan una carga axial y dos momentos en los ejes X e Y debido a cada columna: el primer modelo muestra la superficie mínima de contacto sobre el suelo y el segundo modelo muestra el costo mínimo de diseño para obtener el espesor, los porcentajes y las áreas de acero de refuerzo de la zapata. La presente investigación considera que el suelo se comporta de forma elástica y la zapata como un cuerpo rígido, por lo tanto, cumplen con la ecuación de flexión biaxial, es decir, el diagrama de presión presenta una variación lineal, y las ecuaciones se presenta en función de una carga concéntrica y momentos alrededor de los ejes X e Y aplicados en cada columna. La metodología se desarrolla bajo el concepto que la integral de la fuerza cortante es el momento. Los parámetros de diseño y las funciones de restricción para los dos modelos toman en cuenta los requisitos del código de construcción para concreto estructural del American Concrete Institute. Un diagrama de flujo se presenta para obtener el costo mínimo de una zapata combinada trapezoidal de concreto reforzado usando el programa Maple. Cuatro ejemplos para cálculo estructural se presentan para obtener el área mínima y el costo mínimo de una zapata combinada trapezoidal: El caso 1 para lados opuestos libres en dirección del eje Y, El caso 2 para un lado limitado en la columna 1 en dirección del eje Y, El caso 3 para un lado limitado en la columna 2 en dirección del eje Y, El caso 4 para lados limitados en la columna 1 y 2 en dirección del eje Y. Los modelos actuales consideran que la fuerza resultante de todas las fuerzas y momentos se

ubica en el centro de gravedad sobre el eje transversal del área de la zapata, y toma en cuenta un caso (Caso 2: la zapata se limita a una línea de propiedad del lado de la carga más pesada). Los modelos presentados en este trabajo podrían utilizarse para el diseño de zapatas combinadas rectangulares tomando en cuenta la longitud transversal de la zapata uniforme, y también para diferentes códigos de diseño de concreto reforzado, simplemente modificando las ecuaciones de las capacidades de resistencia para el momento, para el cortante por flexión y para el cortante por punzonamiento, según cada uno de los códigos.

Palabras clave: área mínima, costo mínimo, modelos óptimos, zapatas combinadas trapezoidales.

1. Introducción

La cimentación es el elemento estructural que soporta toda la construcción. Este miembro se supone que actúa como un cuerpo rígido, está en equilibrio bajo la acción de fuerzas y momentos de la superestructura aplicados y las reacciones de los esfuerzos generados por el suelo.

Un problema de optimización consiste en encontrar el valor más satisfactorio para la función que define el desempeño del diseño, buscando los valores adecuados para las variables que lo definen y cumpliendo un conjunto de restricciones y requisitos. En general, una metodología de optimización parte de tres conceptos principales: variables de diseño, función objetivo y restricciones.

Las principales contribuciones sobre el diseño óptimo de cimentaciones poco profundas o superficiales en los últimos diez años son: Hassaan (2014) [1] utilizó el programa MATLAB para estudiar el diseño óptimo de cimentaciones para maquinaria poco profundas sobre un suelo limoso. Hui y col. (2015) [2] presentaron un algoritmo genético y aplicado para el diseño de una cimentación de tira de concreto reforzado. López-Chavarría y col. (2017) [3] desarrollaron un modelo para obtener el área óptima para zapatas combinadas de esquina. Yeh y Huang (2017) [4] estimaron los efectos de la resistencia a la compresión del

concreto, el límite elástico del acero, la excentricidad de la carga axial y la dimensión de la barra de acero para la optimización de zapatas aisladas de concreto reforzado. Luévanos-Rojas y col. (2017) [5] desarrollaron un modelo óptimo bajo el criterio de costo mínimo para diseño de zapatas aisladas rectangulares y la presión del suelo sobre la zapata varía linealmente. Jelušič y Žlender (2018) [6] estudiaron un diseño óptimo de zapata aisladas basado en la optimización multiparamétrica de programación no lineal de enteros mixtos. Velázquez-Santillán y col. (2018) [7] presentaron el diseño óptimo para las zapatas combinadas rectangulares de concreto reforzado con ejemplos numéricos. Luévanos-Rojas y col. (2018) [8] investigaron un modelo matemático para encontrar el tamaño mínimo de zapatas combinadas en forma de T. Malapur y col. (2018) [9] presentaron un diseño para obtener el costo mínimo de columnas y zapatas de concreto reforzado utilizando algoritmos genéticos basados en técnicas de optimización. Rawat y Muttal (2018) [10] propusieron un enfoque simplificado bajo el criterio de costo mínimo para el diseño de zapatas aisladas de concreto reforzado con carga excéntrica que consideran los requisitos estructurales y económicos simultáneamente basado en Excel. Aguilera-Mancilla y col. (2019) [11] presentaron un modelo analítico para obtener las dimensiones óptimas para las zapatas

combinadas de la correa. López-Chavarría y col. (2019) [12] desarrollaron un modelo matemático para obtener el diseño de costo mínimo para las zapatas circulares aisladas basadas en técnicas de optimización. Chaudhuri y Maity (2020) [13] estudiaron el costo óptimo para las zapatas aisladas de forma rectangular aplicando el algoritmo genético y la optimización de enjambre de partículas unificado de acuerdo con el código de la India.

Los trabajos más cercano al tema de dimensionamiento para zapatas combinadas trapezoidales son: Luévanos-Rojas (2015) [14] muestra un modelo para obtener el tamaño de las zapatas combinadas trapezoidales con un límite de propiedad, pero presenta únicamente las ecuaciones y considera que la fuerza resultante se ubica en el centro de gravedad sobre el eje transversal del área de la zapata, y el momento resultante alrededor del eje X es 0, por lo tanto, no se puede obtener la superficie mínima para la zapata. Pasillas-Orona y col. (2020) [15] presentaron un modelo para obtener el área mínima de las zapatas combinadas trapezoidales, pero presentan dos casos (Caso 2: la zapata se limita a una línea de propiedad del lado de la carga más pesada, y Caso 4: la zapata se limita en los dos lados opuestos).

El artículo más cercano al tema de diseño para zapatas combinadas trapezoidales es: Luévanos-Rojas (2015) [16] muestra un modelo matemático para el diseño de las zapatas combinadas trapezoidales de frontera para obtener el espesor y las áreas de acero de refuerzo de las zapatas combinadas trapezoidales para un caso (Caso 2: la zapata se limita a una línea de propiedad del lado de la carga más pesada), pero este modelo considera que la fuerza resultante se ubica en el centro de gravedad sobre el eje transversal del área de la zapata (los momentos alrededor del eje X son cero),

además las ecuaciones son muy específicas para cada sección donde ocurren los momentos, los cortantes por flexión y los cortantes por penetración o punzonamiento y el costo mínimo para diseño no se muestra.

Este artículo presenta dos modelos óptimos para zapatas combinadas trapezoidales, el primer modelo muestra el área mínima de contacto sobre el suelo (función objetivo) y las ecuaciones generalizadas y simplificadas para cuatro casos diferentes (Caso 1: lados opuestos libres en dirección del eje Y, Caso 2: lado limitado en la columna 1 en dirección del eje Y, Caso 3: lado limitado en la columna 2 en dirección del eje Y, Caso 4: lados limitados en la columna 1 y 2 en dirección del eje Y). El segundo modelo muestra las ecuaciones generalizadas y simplificadas para los cuatro casos mencionados anteriormente, y el costo mínimo para diseño (función objetivo) para obtener el espesor de la zapata, los porcentajes y las áreas de acero de refuerzo, este modelo considera que el suelo se comporta de forma elástica y la zapata como un cuerpo rígido, por lo tanto cumplen con la ecuación de la flexión biaxial, es decir, el diagrama de presión presenta una variación lineal, y se presenta en función de una carga concéntrica y momentos alrededor de los ejes X e Y aplicados en cada columna. Los parámetros de diseño y las funciones de restricción para los dos modelos toman en cuenta los requisitos del código de construcción para concreto estructural del American Concrete Institute [17].

El principal aporte de esta investigación es presentar las ecuaciones generalizadas y simplificadas de los dos modelos (área mínima y costo mínimo) para diseño de zapatas combinadas trapezoidales.

2. Formulación del modelo

La figura 1 muestra una zapata combinada trapezoidal que soporta dos columnas rectangulares de diferentes dimensiones (dos columnas ubicadas en el interior de la zapata) bajo una carga axial y dos momentos ortogonales (flexión biaxial) en cada columna.

Los parámetros constantes (conocidos) para obtener el área mínima son: $P_1, M_{x1}, M_{y1}, P_2, M_{x2}, M_{y2}, R, c_1, c_2, c_3, c_4, L, q_{aa}$, y las variables de decisión (desconocidas) son: $A_{min}, I_x, I_y, M_{xT}, M_{yT}, a, b_1, b_2, e, f, x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4, y_t, q_1, q_2, q_3, q_4$.

Los parámetros constantes (conocidos) para encontrar el costo mínimo son: $a, b_1, b_2, M_{uc}, M_{ud}, M_{ue}, M_{uf}$ y M_{ug} , y los parámetros $M_{ua}, M_{ub}, V_{uh}, V_{ui}, V_{uj}, V_{uk}, V_{ul}, V_{um}, V_{up1}$ y V_{up2} se presentan en función de d , y las variables de decisión (desconocidas) son: $C_{min}, d, \rho_{P1}, \rho_{P2}, \rho_{yLbc}, \rho_{yLbg}, \rho_{yLTd}, \rho_{yLTe}, \rho_{yLTf}, A_{sp1}, A_{sp2}, A_{sxTB1}, A_{sxTB2}, A_{sxTB3}, A_{sxTT}, A_{syLB}, A_{syLbc}, A_{syLbg}, A_{syLT}, A_{syLTd}, A_{syLTe}, A_{syLTf}$.

2.1. Superficie mínima de contacto con el suelo para las zapatas combinadas trapezoidales

La función objetivo para obtener el área de contacto mínima sobre el suelo “ A_{min} ” es [15]:

$$A_{min} = \frac{a(b_1 + b_2)}{2} \quad (\text{Ec. 1})$$

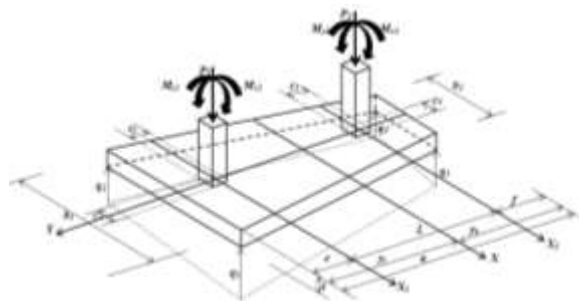


Figura 1. Vista isométrica para una zapata combinada trapezoidal.
Elaboración propia.

La tabla 1 presenta las coordenadas de las presiones en cada vértice de la zapata.

Tabla 1. Coordenadas en cada esquina de la zapata.

Presión de suelo sobre la zapata		q_1	q_2	q_3	q_4
Coordenadas	x_n	$b_1/2$	$-b_1/2$	$b_2/2$	$-b_2/2$
	y_n	y_t	y_t	$y_t - a$	$y_t - a$

Las funciones de restricción para el tamaño de las zapatas combinadas trapezoidales son:

$$q_n = \frac{R}{A} + \frac{M_{xT}y_n}{I_x} + \frac{M_{yT}x_n}{I_y} \quad (\text{Ec. 2})$$

$$R = P_1 + P_2 \quad (\text{Ec. 3})$$

$$M_{xT} = M_{x1} + M_{x2} + R(y_t - e) - P_2L \quad (\text{Ec. 4})$$

$$M_{yT} = M_{y1} + M_{y2} \quad (\text{Ec. 5})$$

$$y_t = \frac{a(b_1 + 2b_2)}{3(b_1 + b_2)} \quad (\text{Ec. 6})$$

$$y_b = \frac{a(2b_1 + b_2)}{3(b_1 + b_2)} \quad (\text{Ec. 7})$$

$$I_x = \frac{a^3(b_1^2 + 4b_1b_2 + b_2^2)}{36(b_1 + b_2)} \quad (\text{Ec. 8})$$

$$I_y = \frac{a(b_1 + b_2)(b_1^2 + b_2^2)}{48} \quad (\text{Ec. 9})$$

$$0 \leq \begin{cases} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{cases} \leq q_{aa} \quad (\text{Ec. 10})$$

$$e + L + f = a \quad (\text{Ec. 11})$$

Donde: R = Fuerza resultante (kN); M_{xT} = Momento resultante alrededor del eje X (kN-m); M_{yT} = Momento resultante alrededor del eje Y (kN-m); x_n = Distancia en la dirección

X medida desde el eje Y hasta la fibra en estudio (m); y_n = Distancia en la dirección Y medida desde el eje X a la fibra en estudio (m); I_x = Momento de inercia alrededor del eje X (m^4); I_y = Momento de inercia alrededor del eje Y (m^4).

Las funciones de restricción para las condiciones geométricas son:
Con ambos lados libres:

$$\frac{c_1}{2} \leq e; \frac{c_3}{2} \leq f \quad (\text{Ec. 12})$$

Con límite en la columna 1:

$$\frac{c_1}{2} = e; \frac{c_3}{2} \leq f \quad (\text{Ec. 13})$$

Con límite en la columna 2:

$$\frac{c_1}{2} \leq e; \frac{c_3}{2} = f \quad (\text{Ec. 14})$$

Con dos lados opuestos limitados:

$$\frac{c_1}{2} = e; \frac{c_3}{2} = f \quad (\text{Ec. 15})$$

2.2. Costo mínimo para zapatas combinadas trapezoidales

2.2.1. Ecuaciones para los cortantes por flexión y momentos

Las secciones críticas para los momentos factorizados o momentos últimos según el código ACI para este tipo de zapatas ocurren en los ejes a y b (ejes paralelos al eje Y), y

en los ejes c, d, e, f y g (ejes paralelos al eje X) (ver. Figura 2).

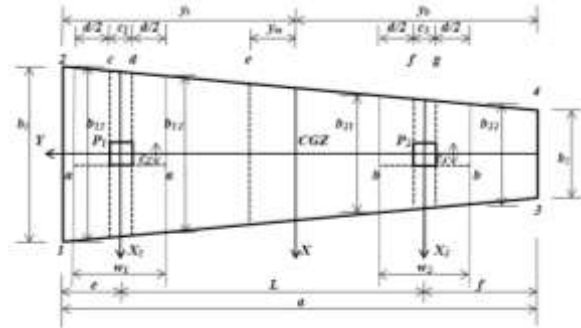


Figura 2. Momentos (secciones críticas).
Elaboración propia.

Las secciones críticas para los cortantes por flexión factorizados o cortantes por flexión últimos según el código ACI para este tipo de zapatas ocurren en los ejes h y i (ejes paralelos al eje Y), y en los ejes j, k, l y m (ejes paralelos al eje X) (ver. Figura 3).

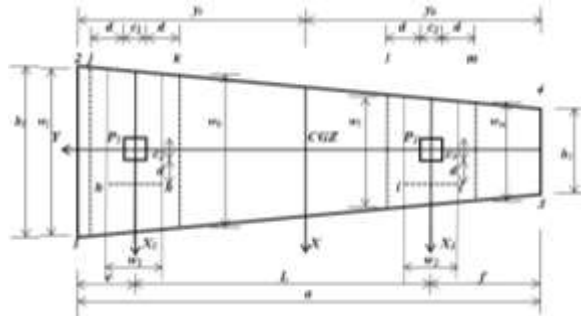


Figura 3. Cortantes por flexión (secciones críticas).
Elaboración propia.

El cortante por flexión factorizado V_{ux1} y el momento factorizado M_{uy1} que actúan sobre la zapata en el eje Y_1 para el intervalo $0 \leq x_1 \leq b_{11}/2$ se obtienen por:

$$V_{ux1} = \frac{P_{u1}(4x_1 - b_{11} - b_{12})}{2(b_{11} + b_{12})} - \frac{3[2M_{ux1} + P_{u1}(w_1 - c_1)](b_{11}^2 - b_{12}^2)}{4w_1(b_{11}^2 + 4b_{11}b_{12} + b_{12}^2)} + \frac{M_{uy1}[24x_1^2 - 2(b_{11}^2 + b_{11}b_{12} + b_{12}^2)]}{(b_{11} + b_{12})(b_{11}^2 + b_{12}^2)} \quad (\text{Ec. 16})$$

$$M_{uy_1} = \frac{P_{u1}(4x_1^2 - 2(b_{11} + b_{12})x_1 + b_{11}b_{12})}{4(b_{11} + b_{12})} - \frac{3P_{u1}(w_1 - c_1)(b_{11}^2 - b_{12}^2)(2x_1 - b_{11})}{8w_1(b_{11}^2 + 4b_{11}b_{12} + b_{12}^2)} + \frac{M_{uy_1}[8x_1^3 - 2(b_{11}^2 + b_{11}b_{12} + b_{12}^2)x_1 + b_{11}b_{12}(b_{11} + b_{12})]}{(b_{11} + b_{12})(b_{11}^2 + b_{12}^2)} \quad (\text{Ec. 17})$$

Donde: el ancho de estudio para el cortante por flexión y el momento en el eje Y_1 es $w_1 = c_1 + d/2$ para la columna de borde y para la columna sin límite es $w_1 = c_1 + d$, P_{u1} es la carga axial factorizada que actúa sobre la zapata debido a la columna 1, M_{uy_1} es el momento factorizado que actúa sobre la zapata debido a la columna 1, las longitudes de b_{11} y b_{12} se obtienen de la siguiente manera: $b_{11} = b_1 - (e - c_1/2 - d/2)(b_1 - b_2)/a$ (columna sin límite) y $b_{11} = b_1$ (columna de borde), y $b_{12} = b_1 - (e + c_1/2 + d/2)(b_1 - b_2)/a$.

Ahora, sustituyendo $x_1 = c_2/2 + d$ en la Ec. (16) se obtiene el cortante por flexión V_{uh} que actúa sobre el eje h . Sustituyendo $x_1 = c_2/2$ en la Ec. (17) se obtiene el momento M_{ua} que actúa sobre el eje a .

El cortante por flexión factorizado V_{ux_2} y el momento factorizado M_{uy_2} que actúan sobre la zapata en el eje Y_2 para el intervalo $0 \leq x_2 \leq b_{21}/2$ se obtienen por:

$$V_{ux_2} = \frac{P_{u2}(4x_2 - b_{21} - b_{22})}{2(b_{21} + b_{22})} - \frac{3[2M_{ux_2} + P_{u2}(w_2 - c_3)](b_{21}^2 - b_{22}^2)}{4w_2(b_{21}^2 + 4b_{21}b_{22} + b_{22}^2)} + \frac{M_{uy_2}[24x_2^2 - 2(b_{21}^2 + b_{21}b_{22} + b_{22}^2)]}{(b_{21} + b_{22})(b_{21}^2 + b_{22}^2)} \quad (\text{Ec. 18})$$

$$M_{uy_2} = \frac{P_{u2}[4x_2^2 - 2(b_{21} + b_{22})x_2 + b_{21}b_{22}]}{4(b_{21} + b_{22})} - \frac{3P_{u2}(w_2 - c_3)(b_{21}^2 - b_{22}^2)(2x_2 - b_{21})}{8w_2(b_{21}^2 + 4b_{21}b_{22} + b_{22}^2)} + \frac{M_{uy_2}[8x_2^3 - 2(b_{21}^2 + b_{21}b_{22} + b_{22}^2)x_2 + b_{21}b_{22}(b_{21} + b_{22})]}{(b_{21} + b_{22})(b_{21}^2 + b_{22}^2)} \quad (\text{Ec. 19})$$

Donde: el ancho de estudio para el cortante por flexión y el momento en el eje Y_2 es $w_2 = c_3 + d/2$ para la columna de borde y para la columna sin límite es $w_2 = c_3 + d$, P_{u2} es la carga axial factorizada que actúa sobre la zapata debido a la columna 2, M_{uy_2} es el momento factorizado que actúa sobre la zapata debido a la columna 2, las longitudes de b_{21} y b_{22} se obtienen de la siguiente manera: $b_{21} = b_1 - (L + e - c_3/2 - d/2)(b_1 -$

$b_2)/a$, $b_{22} = b_1 - (L + e + c_3/2 + d/2)(b_1 - b_2)/a$ (columna sin límite) y $b_{22} = b_2$ (columna de borde).

Ahora, sustituyendo $x_2 = c_4/2 + d$ en la Ec. (18) se obtiene el cortante por flexión V_{ui} que actúa sobre el eje i . Sustituyendo $x_2 = c_4/2$ en la Ec. (19) se obtiene el momento M_{ub} que actúa sobre el eje b .

El cortante por flexión factorizado V_{uY} y el momento factorizado M_{uX} que actúan sobre

la zapata en el eje X para el intervalo $y_t - e \leq y \leq y_t$ se obtienen por:

$$V_{uY} = - \frac{R_u \{ (b_1 - b_2)(y_t^2 - y^2) + 2[ab_1 - y_t(b_1 - b_2)](y_t - y) \}}{2Aa} - \frac{M_{uxT} \{ 2(b_1 - b_2)(y_t^3 - y^3) + 3[ab_1 - y_t(b_1 - b_2)](y_t^2 - y^2) \}}{6I_x a} \quad (\text{Ec. 20})$$

$$M_{uX} = \frac{M_{uxT} [2ab_1(2y_t^3 - 3y_t^2y + y^3) - (b_1 - b_2)(y_t^4 - 2y_t^3y + 2y_t y^3 - y^4)]}{12I_x a} + \frac{R_u [3ab_1(y_t - y)^2 - (b_1 - b_2)(y_t - y)^3]}{6Aa} \quad (\text{Ec. 21})$$

Donde: el ancho de estudio para el cortante por flexión en el eje j es $w_j = b_1 - (e - c_1/2 - d)(b_1 - b_2)/a$, y el ancho de estudio para el momento en el eje c es $w_c = b_1 - (e - c_1/2)(b_1 - b_2)/a$.

V_{uj} que actúa sobre el eje j . Sustituyendo $y = y_t - e + c_1/2$ en la Ec. (21) se obtiene el momento M_{uc} que actúa sobre el eje c .

Ahora, sustituyendo $y = y_t - e + c_1/2 + d$ en la Ec. (20) se obtiene el cortante por flexión

El cortante por flexión factorizado V_{uY} y el momento factorizado M_{uX} que actúan sobre la zapata en el eje X para el intervalo $y_t - L - e \leq y \leq y_t - e$ se obtienen por:

$$V_{uY} = P_{u1} - \frac{R_u \{ (b_1 - b_2)(y_t^2 - y^2) + 2[ab_1 - y_t(b_1 - b_2)](y_t - y) \}}{2Aa} - \frac{M_{uxT} \{ 2(b_1 - b_2)(y_t^3 - y^3) + 3[ab_1 - y_t(b_1 - b_2)](y_t^2 - y^2) \}}{6I_x a} \quad (\text{Ec. 22})$$

$$M_{uX} = \frac{M_{uxT} [2ab_1(2y_t^3 - 3y_t^2y + y^3) - (b_1 - b_2)(y_t^4 - 2y_t^3y + 2y_t y^3 - y^4)]}{12I_x a} + \frac{R_u [3ab_1(y_t - y)^2 - (b_1 - b_2)(y_t - y)^3]}{6Aa} - P_{u1}(y_t - e - y) - M_{ux1} \quad (\text{Ec. 23})$$

Donde: el ancho de estudio para el cortante por flexión en el eje k es $w_k = b_1 - (e + c_1/2 + d)(b_1 - b_2)/a$, y el ancho de estudio para el momento en el eje d es $w_d = b_1 - (e + c_1/2)(b_1 - b_2)/a$, el ancho de estudio para el cortante por flexión en el eje l es $w_l = b_1 - (L + e - c_3/2 - d)(b_1 - b_2)/a$, y el ancho de estudio para el momento en el eje e es $w_e = b_1 - (y_t - y_m)(b_1 - b_2)/a$ (y_m es la ubicación del momento máximo positivo a partir del eje X, es decir, la fuerza cortante por flexión es igual a cero), el ancho de estudio para el

momento en el eje f es $w_f = b_1 - (L + e - c_3/2)(b_1 - b_2)/a$.

Ahora, sustituyendo $y = y_t - e - c_1/2 - d$ en la Ec. (22) se obtiene el cortante por flexión V_{uk} que actúa sobre el eje k . Sustituyendo $y = y_t - L - e + c_3/2 + d$ en la Ec. (22) se obtiene el cortante por flexión V_{ul} que actúa sobre el eje l . Sustituyendo $y = y_t - e - c_1/2$ en la Ec. (23) se obtiene el momento M_{ud} que actúa sobre el eje d . Sustituyendo $y = y_t - y_m$ en la Ec. (23) se obtiene el momento

M_{ue} que actúa sobre el eje e . Sustituyendo $y = y_t - L - e + c_3/2$ en la Ec. (23) se obtiene el momento M_{uf} que actúa sobre el eje f .

El cortante por flexión factorizado V_{uY} y el momento factorizado M_{uX} que actúan sobre la zapata en el eje X para el intervalo $y_t - a \leq y \leq y_t - L - e$ se obtienen por:

$$V_{uY} = P_{u1} + P_{u2} - \frac{R_u\{(b_1 - b_2)(y_t^2 - y^2) + 2[ab_1 - y_t(b_1 - b_2)](y_t - y)\}}{2Aa} - \frac{M_{uxT}\{2(b_1 - b_2)(y_t^3 - y^3) + 3[ab_1 - y_t(b_1 - b_2)](y_t^2 - y^2)\}}{6I_x a} \quad (\text{Ec. 24})$$

$$M_{uX} = \frac{M_{uxT}[2ab_1(2y_t^3 - 3y_t^2y + y^3) - (b_1 - b_2)(y_t^4 - 2y_t^3y + 2y_t y^3 - y^4)]}{12I_x a} + \frac{R_u[3ab_1(y_t - y)^2 - (b_1 - b_2)(y_t - y)^3]}{6Aa} - R_u(y_t - e - y) + P_{u2}L - M_{ux1} - M_{ux2} \quad (\text{Ec. 25})$$

Donde: el ancho de estudio para el cortante por flexión en el eje m es $w_m = b_1 - (L + e + c_3/2 + d)(b_1 - b_2)/a$, y el ancho de estudio para el momento en el eje g es $w_g = b_1 - (L + e + c_3/2)(b_1 - b_2)/a$.

Ahora, sustituyendo $y = y_t - L - e - c_3/2 - d$ en la Ec. (24) se obtiene el cortante por flexión V_{um} que actúa sobre el eje m . Sustituyendo $y = y_t - L - e - c_3/2$ en la Ec. (25) se obtiene el momento M_{ug} que actúa sobre el eje g .

2.2.2. Ecuaciones para los cortantes por punzonamiento

El cortante por punzonamiento factorizado para la columna 1 se presenta en el perímetro formado por los puntos 5, 6, 7 y 8, y para la columna 2 se presenta en el

perímetro formado por los puntos 9, 10, 11 y 12 según el código ACI (ver. Figura 4).

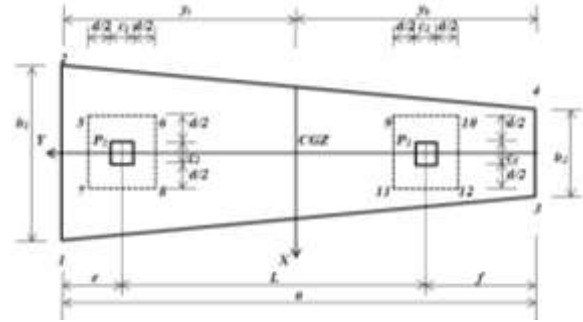


Figura 4. Cortantes por punzonamiento (secciones críticas).
Elaboración propia.

El cortante por punzonamiento que actúa sobre la zapata en la columna 1 V_{up1} y en la columna 2 V_{up2} son:

Para columna de borde

$$V_{up1} = P_{u1} - \frac{[R_u I_x + M_{uxT} A (y_t - c_1/2 - d/4)](c_1 + d/2)(c_2 + d)}{A I_x} \quad (\text{Ec. 26})$$

Para columna sin límite

$$V_{up1} = P_{u1} - \frac{[R_u I_x + M_{uxT} A (y_t - e)](c_1 + d)(c_2 + d)}{A I_x} \quad (\text{Ec. 27})$$

Para columna de borde

$$V_{up2} = P_{u2} - \frac{[R_u I_x + M_{uxT} A(y_t - e - L + d/4)](c_3 + d/2)(c_4 + d)}{A I_x} \quad (\text{Ec. 28})$$

Para columna sin límite

$$V_{up2} = P_{u2} - \frac{[R_u I_x + M_{uxT} A(y_t - e - L)](c_3 + d)(c_4 + d)}{A I_x} \quad (\text{Ec. 29})$$

2.2.3. Función objetivo para minimizar el costo

El costo total mínimo “ C_t ” es igual al costo de concreto que incluye mano de obra y materiales más el costo del acero de refuerzo que incluye habilitado y armado. El costo total mínimo de las zapatas combinadas trapezoidales es:

$$C_t = V_c C_c + V_s \gamma_s C_s \quad (\text{Ec. 30})$$

Donde: C_t en dólares, C_c en dólares/m³, C_s en dólares/kN, V_c es el volumen de concreto en m³, V_s es el volumen de acero en m³, γ_s es la densidad del acero que es igual a 76.94 kN/m³.

Los volúmenes de las zapatas combinadas trapezoidales son:

$$V_s = (A_{syLT} + A_{syLB})a + A_{sxTT} \left(\frac{b_1 + b_2}{2} \right) + A_{sxTB1} \left(\frac{b_1 + b_{11}}{2} \right) + A_{sP1} \left(\frac{b_{11} + b_{12}}{2} \right) + A_{sxTB2} \left(\frac{b_{12} + b_{21}}{2} \right) + A_{sP2} \left(\frac{b_{21} + b_{22}}{2} \right) + A_{sxTB3} \left(\frac{b_{22} + b_2}{2} \right) \quad (\text{Ec. 31})$$

$$V_c = \frac{a(b_1 + b_2)t}{2} - (A_{syLT} + A_{syLB})a - A_{sxTT} \left(\frac{b_1 + b_2}{2} \right) - A_{sxTB1} \left(\frac{b_1 + b_{11}}{2} \right) - A_{sP1} \left(\frac{b_{11} + b_{12}}{2} \right) - A_{sxTB2} \left(\frac{b_{12} + b_{21}}{2} \right) - A_{sP2} \left(\frac{b_{21} + b_{22}}{2} \right) - A_{sxTB3} \left(\frac{b_{22} + b_2}{2} \right) \quad (\text{Ec. 32})$$

Donde: t = espesor total de la zapata en m, A_{syLT} = área de acero de refuerzo longitudinal en la parte superior y ubicada en la parte media en la dirección del eje Y en m², A_{syLB} = área de acero de refuerzo longitudinal en la parte inferior y ubicada en el parte media en la dirección del eje Y en m², A_{sxTT} = área del acero de refuerzo transversal en la parte superior con un ancho “ a ” en la dirección del eje X en m², A_{sP1} = área del acero de refuerzo transversal en la parte inferior de la columna 1 con un ancho w_1 en la dirección del eje X en m², A_{sP2} =

área del acero de refuerzo transversal en la parte inferior de la columna 2 con un ancho w_2 en la dirección del eje X en m², A_{sxTB1} = área del acero de refuerzo transversal en la parte inferior con un ancho $(e - w_1/2)$ en la dirección del eje X en m², A_{sxTB2} = área del acero de refuerzo transversal en la parte inferior con un ancho $(L - c_1/2 - c_3/2 - d)$ en la dirección del eje X en m², A_{sxTB3} = área del acero de refuerzo transversal en la parte inferior con un ancho $(a - e - L - c_3/2 - d/2)$ en la dirección del eje X en m².

Sustituyendo las Ecs. (31) y (32) en la Ec. (30) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 C_t = C_c & \left[\frac{\alpha(b_1 + b_2)t}{2} - (A_{syLT} + A_{syLB})a - A_{sxTT} \left(\frac{b_1 + b_2}{2} \right) - A_{sxTB1} \left(\frac{b_1 + b_{11}}{2} \right) \right. \\
 & - A_{sP1} \left(\frac{b_{11} + b_{12}}{2} \right) - A_{sxTB2} \left(\frac{b_{12} + b_{21}}{2} \right) - A_{sP2} \left(\frac{b_{21} + b_{22}}{2} \right) \\
 & \left. - A_{sxTB3} \left(\frac{b_{22} + b_2}{2} \right) \right] \\
 & + \gamma_s C_s \left[(A_{syLT} + A_{syLB})a + A_{sxTT} \left(\frac{b_1 + b_2}{2} \right) + A_{sxTB1} \left(\frac{b_1 + b_{11}}{2} \right) \right. \\
 & + A_{sP1} \left(\frac{b_{11} + b_{12}}{2} \right) + A_{sxTB2} \left(\frac{b_{12} + b_{21}}{2} \right) + A_{sP2} \left(\frac{b_{21} + b_{22}}{2} \right) \\
 & \left. + A_{sxTB3} \left(\frac{b_{22} + b_2}{2} \right) \right] \quad (\text{Ec. 33})
 \end{aligned}$$

Posteriormente, sustituyendo $\gamma_s C_s = \alpha C_c$ (donde $\alpha = \gamma_s C_s / C_c$) en Ec. (33) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 C_t = C_c & \left\{ \left[(A_{syLT} + A_{syLB})a + A_{sxTT} \left(\frac{b_1 + b_2}{2} \right) + A_{sxTB1} \left(\frac{b_1 + b_{11}}{2} \right) \right. \right. \\
 & + A_{sP1} \left(\frac{b_{11} + b_{12}}{2} \right) + A_{sxTB2} \left(\frac{b_{12} + b_{21}}{2} \right) + A_{sP2} \left(\frac{b_{21} + b_{22}}{2} \right) \\
 & \left. \left. + A_{sxTB3} \left(\frac{b_{22} + b_2}{2} \right) \right] (\alpha - 1) + \frac{\alpha(b_1 + b_2)(d + r)}{2} \right\} \quad (\text{Ec. 34})
 \end{aligned}$$

2.2.4. Funciones de restricción

Las ecuaciones para el diseño de zapatas combinadas trapezoidales según el código ACI son [17]:

Para los momentos:

$$|M_{ua}|, |M_{ub}|, |M_{uc}|, |M_{ud}|, |M_{ue}|, |M_{uf}|, |M_{ug}| \leq \phi_f f_y d A_s \left(1 - \frac{0.59 A_s f_y}{b_w d f'_c} \right) \quad (\text{Ec. 35})$$

Donde: f_y = límite elástico especificado del acero de refuerzo en MPa, f'_c = resistencia a la compresión especificada del concreto a los 28 días en MPa; el ancho de la superficie de estudio b_w para M_{ua} es w_1 , para M_{ub} es w_2 , para M_{uc} es w_c , para M_{ud} es w_d , para M_{ue} es w_e , para M_{uf} es w_f y para M_{ug} es w_g ; las áreas

de acero de refuerzo A_s para M_{ua} es A_{sP1} , para M_{ub} es A_{sP2} , para M_{uc} es A_{syLbc} , para M_{ud} es A_{syLTd} , para M_{ue} es A_{syLTe} , para M_{uf} es A_{syLTf} , y para M_{ug} es A_{syLBg} .

Para los cortantes por flexión:

$$|V_{uh}|, |V_{ui}|, |V_{uj}|, |V_{uk}|, |V_{ul}|, |V_{um}| \leq 0.17 \phi_v \sqrt{f'_c} b_w s d \quad (\text{Ec. 36})$$

Donde: el ancho de la superficie de estudio b_{ws} para V_{uh} es w_1 , para V_{ui} es w_2 , para V_{uj} es w_j , para V_{uk} es w_k , para V_{ul} es w_l , y para V_{um} es w_m .

Para los cortantes por punzonamiento:

$$|V_{up1}|, |V_{up2}| \leq \begin{cases} 0.17\phi_v \left(1 + \frac{2}{\beta_c}\right) \sqrt{f'_c} b_0 d \\ 0.083\phi_v \left(\frac{\alpha_s d}{b_0} + 2\right) \sqrt{f'_c} b_0 d \\ 0.33\phi_v \sqrt{f'_c} b_0 d \end{cases} \quad (\text{Ec. 37})$$

Donde: β_c = relación del lado largo entre el lado corto de la columna; b_0 = perímetro de la sección crítica para el cortante por punzonamiento en m, para la columna 1 $b_0 = 2c_1 + c_2 + 2d$ (columna de borde) y $b_0 = 2c_1 + 2c_2 + 4d$ (columna sin límite), para la columna 2 $b_0 = 2c_3 + c_4 + 2d$ (columna de

borde) y $b_0 = 2c_3 + 2c_4 + 4d$ (columna sin límite), $\alpha_s = 20$ para columnas de esquina, $\alpha_s = 30$ para columnas de borde, y $\alpha_s = 40$ para columnas interiores.

Para el porcentaje máximo y mínimo de acero de refuerzo:

$$\rho_{P_1}, \rho_{P_2}, \rho_{yLBC}, \rho_{yLTd}, \rho_{yLT_e}, \rho_{yLT_f}, \rho_{yLBg} \leq \rho_{max} = 0.75 \left[\frac{0.85\beta_1 f'_c}{f_y} \left(\frac{600}{600 + f_y} \right) \right] \quad (\text{Ec. 38})$$

$$\rho_{P_1}, \rho_{P_2}, \rho_{yLBC}, \rho_{yLTd}, \rho_{yLT_e}, \rho_{yLT_f}, \rho_{yLBg} \geq \rho_{min} = \begin{cases} \frac{0.25\sqrt{f'_c}}{f_y} \\ \frac{1.4}{f_y} \end{cases} \quad (\text{Ec. 39})$$

Para las áreas de acero de refuerzo:

$$A_{SP1} = \rho_{P1} w_1 d \quad (\text{Ec. 40})$$

$$A_{SP2} = \rho_{P2} w_2 d \quad (\text{Ec. 41})$$

$$A_{SyLBC} = \rho_{yLBC} w_c d \quad (\text{Ec. 42})$$

$$A_{SyLTd} = \rho_{yLTd} w_d d \quad (\text{Ec. 43})$$

$$A_{SyLT_e} = \rho_{yLT_e} w_e d \quad (\text{Ec. 44})$$

$$A_{SyLT_f} = \rho_{yLT_f} w_f d \quad (\text{Ec. 45})$$

$$A_{SyLBg} = \rho_{yLBg} w_g d \quad (\text{Ec. 46})$$

$$A_{SxTT} = 0.0018ad \quad (\text{Ec. 47})$$

$$A_{SxTB1} = 0.0018(e - c_1/2 - d/2)d \quad (\text{Ec. 48})$$

$$A_{SxTB2} = 0.0018(L - c_1/2 - c_3/2 - d)d \quad (\text{Ec. 49})$$

$$A_{SxTB3} = 0.0018(a - e - L - c_3/2 - d/2)d \quad (\text{Ec. 50})$$

$$A_{SyLT} \geq \begin{cases} \frac{A_{SyLTd}(b_1 + b_2)}{2w_d} \\ \frac{A_{SyLT_e}(b_1 + b_2)}{2w_e} \\ \frac{A_{SyLT_f}(b_1 + b_2)}{2w_f} \end{cases} \quad (\text{Ec. 51})$$

$$A_{syLB} \geq \begin{cases} \frac{A_{syLBc}(b_1 + b_2)}{2w_c} \\ \frac{A_{syLBg}(b_1 + b_2)}{2w_g} \end{cases} \quad (\text{Ec. 52})$$

La Figura 5 presenta el diagrama de flujo para obtener el costo mínimo de una zapata combinada trapezoidal de concreto reforzado usando el programa Maple.

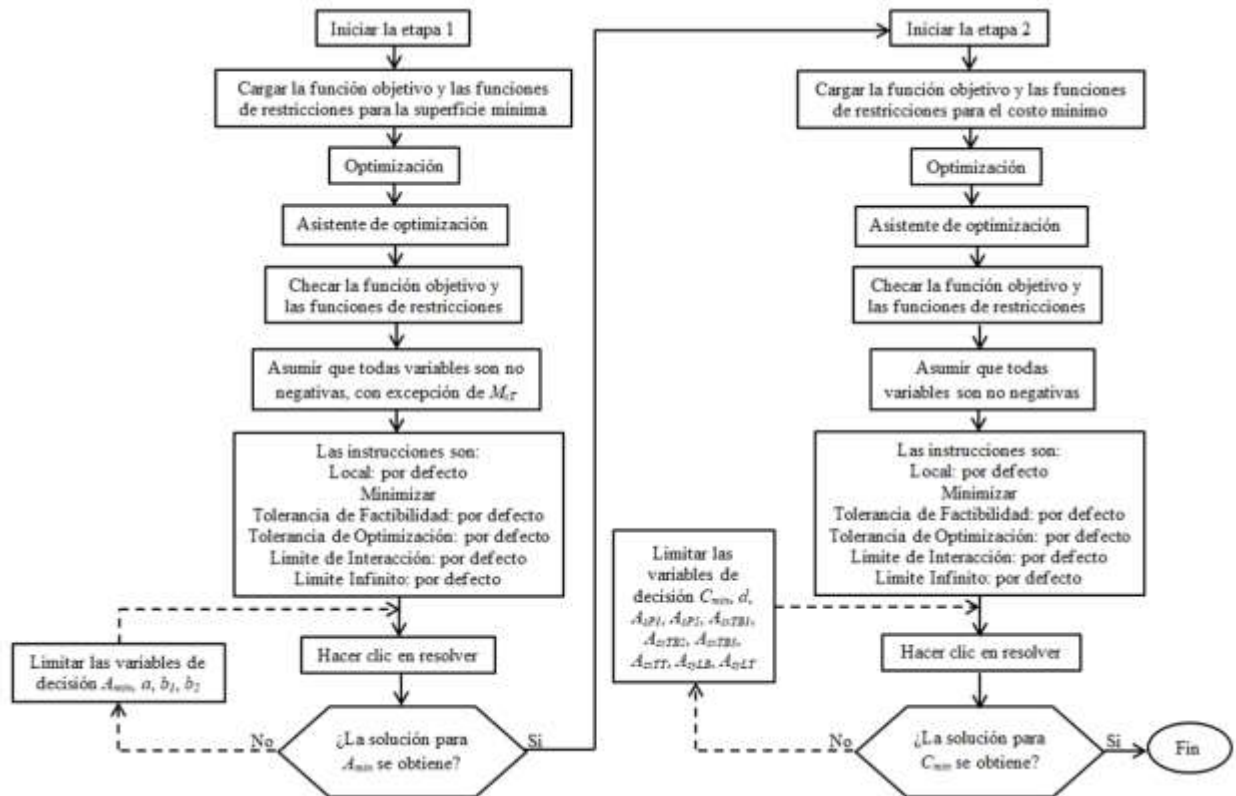


Figura 5. Diagrama de flujo por el programa Maple para el costo mínimo de zapatas combinadas trapezoidales. Elaboración propia.

3. Aplicación del modelo

Esta sección describe cuatro ejemplos numéricos que se presentan para encontrar el diseño (costo mínimo) de una zapata combinada trapezoidal de concreto reforzado que soporta dos columnas cuadradas como se muestra en la figura 1. El primer ejemplo considera ambos lados libres en la dirección del eje Y. El segundo ejemplo toma en cuenta un lado limitado en la dirección del eje Y (columna 1). El tercer ejemplo considera un lado limitado en la dirección del eje Y (columna 2). El cuarto ejemplo

toma en cuenta ambos lados opuestos limitados en la dirección del eje Y.

El diseño considera la siguiente información: las dos columnas son de 40x40 cm, $L = 5.00$ m, $H = 2.0$ m, $P_{D1} = 600$ kN, $P_{L1} = 600$ kN, $M_{Dx1} = 140$ kN-m, $M_{Lx1} = 100$ kN-m, $M_{Dy1} = 180$ kN-m, $M_{Ly1} = 120$ kN-m, $P_{D2} = 500$ kN, $P_{L2} = 500$ kN, $M_{Dx2} = 120$ kN-m, $M_{Lx2} = 80$ kN-m, $M_{Dy2} = 140$ kN-m, $M_{Ly2} = 120$ kN-m, $f'_c = 28$ MPa, $f'_y = 420$ MPa, $q_a = 250.00$ kN/m², γ_{cd} (densidad del concreto) = 24 kN/m³, $\gamma_{sd} = 15$ kN/m³ (densidad de la tierra de relleno). r (recubrimiento de concreto) =

8 cm, y α (relación entre el costo del acero de refuerzo y el costo del concreto) = 90. Este valor de α se justifica en las Tablas 2 y 3. La Tabla 2 muestra el precio unitario del

concreto hecho en obra con revolvedora de un saco tipo trompo. Tabla 3 muestra el precio unitario del acero de refuerzo por kN.

Tabla 2. Precio unitario de concreto hecho en obra por m³.

Descripción	Unidad	Cantidad	Costo Dólares	Importe Dólares
Materiales				
Cemento	kN	4.20	18.55	77.91
Arena	m ³	0.54	12.50	6.75
Grava	m ³	0.67	12.50	8.38
Agua	m ³	0.19	1.25	0.24
Subtotal Materiales				93.28
Mano de obra				
1 Albañil + 5 Peones	Jor.	0.10	100.00	10.00
Subtotal Mano de obra				10.00
Equipo				
Revolvedora	Hr.	0.50	5.00	2.50
Subtotal Equipo				2.50
Costo Directo				105.78

Elaboración propia.

Tabla 3. Precio unitario del acero de refuerzo por kN.

Descripción	Unidad	Cantidad	Costo Dólares	Importe Dólares
Materiales				
Acero corrugado	kN	1.00	121.05	121.05
Alambre recocido	kN	0.004	172.78	0.69
Subtotal Materiales				121.74
Mano de obra				
1 Fierro + 1 Ayudante	Jor.	0.05	40	2.00
Subtotal Mano de obra				2.00
Costo Directo				123.74

Elaboración propia.

Ahora, si se utiliza la relación $\alpha = \gamma_s C_s / C_c = (76.94)(123.74) / 105.78 = 90$.

Las cargas y momentos que actúan sobre la zapata combinada trapezoidal debidos a las columnas son: $P_1 = 1200 \text{ kN}$, $M_{x1} = 240 \text{ kN-m}$, $M_{y1} = 300 \text{ kN-m}$, $P_2 = 1000 \text{ kN}$, $M_{x2} = 200 \text{ kN-m}$, $M_{y2} = 260 \text{ kN-m}$.

La capacidad de carga permisible disponible del suelo se considera de $q_{aa} = 215.00 \text{ kN/m}^2$, porque a la capacidad de carga permisible del suelo " q_a " se resta el peso de la zapata (densidad del concreto por el espesor de la zapata) y el peso del relleno del

suelo (densidad del suelo de relleno por el espesor del relleno del suelo).

Las cargas y momentos factorizados que actúan sobre la zapata combinada trapezoidal debido a las columnas son: $P_{u1} = 1680 \text{ kN}$, $M_{ux1} = 328 \text{ kN-m}$, $M_{uy1} = 408 \text{ kN-m}$, $P_{u2} = 1400 \text{ kN}$, $M_{ux2} = 272 \text{ kN-m}$, $M_{uy2} = 360 \text{ kN-m}$.

El área mínima y el costo mínimo se obtienen mediante el programa MAPLE-15 para la zapata combinada trapezoidal de concreto reforzado [18].

3.1. Caso 1 (lados libres en la dirección del eje Y)

Ahora, todos los valores correspondientes se sustituyen en la Ec. (1) para encontrar la función objetivo (área óptima), y también en las Ecs. (2) a (12) para obtener las funciones de restricción y añadir $a \geq 0 m$, $b_1 = 3.00 m$ y $b_2 = 2.00 m$, y se obtiene una solución inicial. Posteriormente, se sustituyen las dimensiones propuestas en base a la solución inicial (ver. Tabla 4).

Ahora, sustituyendo los valores correspondientes en la Ec. (34) para obtener la función objetivo (diseño óptimo o costo mínimo), y también en las Ecs. (35) a (52) para encontrar las funciones de restricción, y se obtiene una solución inicial. Posteriormente, se sustituyen la profundidad efectiva propuesta ($d = 42.00 cm$) en base a la solución inicial (ver Tabla 5).

3.2. Caso 2 (lado limitado en la dirección del eje Y en la columna 1)

Ahora, todos los valores correspondientes se sustituyen en la Ec. (1) para encontrar la función objetivo (área óptima), y también en las Ecs. (2) a (11) y (13) para obtener las funciones de restricción y añadir $a \geq 0 m$, $b_1 \geq 0 m$ y $b_2 \geq 0 m$, y se obtiene una solución inicial. Posteriormente, se sustituyen las dimensiones propuestas en base a la solución inicial (ver. Tabla 4).

Ahora, sustituyendo los valores correspondientes en la Ec. (34) para obtener la función objetivo (diseño óptimo o costo mínimo), y también en las Ecs. (35) a (52) para encontrar las funciones de restricción, y se obtiene una solución inicial. Posteriormente, se sustituyen la profundidad efectiva propuesta ($d = 52.00 cm$) en base a la solución inicial (ver Tabla 5).

3.3. Caso 3 (lado limitado en la dirección del eje Y en la columna 2)

Ahora, todos los valores correspondientes se sustituyen en la Ec. (1) para encontrar la función objetivo (área óptima), y también en las Ecs. (2) a (11) y (14) para obtener las funciones de restricción y añadir $a \geq 0 m$, $b_1 \geq 0 m$ y $b_2 \geq 0 m$, y se obtiene una solución inicial. Posteriormente, se sustituyen las dimensiones propuestas en base a la solución inicial (ver Tabla 4).

Ahora, sustituyendo los valores correspondientes en la Ec. (34) para obtener la función objetivo (diseño óptimo o costo mínimo), y también en las Ecs. (35) a (52) para encontrar las funciones de restricción, y se obtiene una solución inicial. Posteriormente, se sustituyen la profundidad efectiva propuesta ($d = 47.00 cm$) en base a la solución inicial (ver Tabla 5).

3.4. Caso 4 (lados opuestos limitados en la dirección del eje Y)

Ahora, todos los valores correspondientes se sustituyen en la Ec. (1) para encontrar la función objetivo (área óptima), y también en las Ecs. (2) a (11) y (15) para obtener las funciones de restricción y añadir $a \geq 0 m$, $b_1 \geq 0 m$ y $b_2 \geq 0 m$, y se obtiene una solución inicial. Posteriormente, se sustituyen las dimensiones propuestas en base a la solución inicial (ver Tabla 4).

Ahora, sustituyendo los valores correspondientes en la Ec. (34) para obtener la función objetivo (diseño óptimo o costo mínimo), y también en las Ecs. (35) a (52) para encontrar las funciones de restricción, y se obtiene una solución inicial. Posteriormente, se sustituyen la profundidad efectiva propuesta ($d = 92.00 cm$) en base a la solución inicial (ver Tabla 5).

Tabla 4. Solución inicial “SI” y solución final “SF” para área mínima de los cuatro casos.

Concepto	Caso 1		Caso 2		Caso 3		Caso 4	
	SI	SF	SI	SF	SI	SF	SI	SF
$I_x (m^4)$	57.22	59.10	30.80	31.78	47.27	48.31	30.01	30.34
$I_y (m^4)$	8.84	8.94	13.74	14.28	9.81	10.26	13.52	13.83
$M_{xT} (kN-m)$	-277.52	-314.00	-484.15	-453.33	-287.44	-334.77	-436.16	-428.00
$M_{yT} (kN-m)$	560.00	560.00	560.00	560.00	560.00	560.00	560.00	560.00
$R (kN)$	2200.00	2200.00	2200.00	2200.00	2200.00	2200.00	2200.00	2200.00
$a (m)$	6.53	6.60	6.16	6.20	6.03	6.05	5.40	5.40
$b_1 (m)$	3.00	3.00	4.75	4.80	3.28	3.35	4.62	4.65
$b_2 (m)$	2.00	2.00	0.00	0.00	2.00	2.00	0.83	0.85
$e (m)$	1.10	1.15	0.20	0.20	0.83	0.85	0.20	0.20
$f (m)$	0.43	0.45	0.96	1.00	0.20	0.20	0.20	0.20
$y_t (m)$	3.05	3.08	2.05	2.07	2.77	2.77	2.07	2.08
$q_1 (kN/m^2)$	215.00	210.95	215.00	212.45	215.00	208.12	215.00	213.01
$q_2 (kN/m^2)$	24.99	22.98	21.41	24.28	27.58	25.36	23.60	24.66
$q_3 (kN/m^2)$	215.00	214.69	215.00	206.82	215.00	213.11	215.00	212.22
$q_4 (kN/m^2)$	88.33	89.38	215.00	206.82	100.89	104.11	180.56	177.79
$A_{min} (m^2)$	16.32	16.50	14.62	14.88	15.93	16.18	14.72	14.85

Elaboración propia.

Tabla 5. Solución inicial “SI” y solución propuesta “SP” para el costo mínimo de los cuatro casos.

Concepto	Caso 1		Caso 2		Caso 3		Caso 4	
	SI	SF	SI	SF	SI	SF	SI	SF
$d (cm)$	39.71	42.00	48.93	52.00	42.40	47.00	89.43	92.00
ρ_{P1}	0.01474	0.01254	0.02125	0.01771	0.01405	0.01048	0.00400	0.00372
ρ_{P2}	0.00847	0.00728	0.00333	0.00333	0.00974	0.00750	0.00333	0.00333
ρ_{yLBc}	0.00333	0.00333	0.00333	0.00333	0.00333	0.00333	0.00333	0.00333
ρ_{yLBg}	0.00333	0.00333	0.00333	0.00333	0.00333	0.00333	0.00333	0.00333
ρ_{yLTd}	0.00972	0.00413	0.00630	0.00402	0.00349	0.00412	0.00333	0.00333
ρ_{yLTe}	0.00972	0.00859	0.00726	0.00638	0.00922	0.00737	0.00333	0.00333
ρ_{yLTf}	0.00972	0.00405	0.00419	0.00364	0.00464	0.00414	0.00333	0.00333
$A_{sP1} (cm^2)$	46.65	43.19	67.03	60.79	49.08	42.85	30.30	29.40
$A_{sP2} (cm^2)$	26.80	25.09	14.50	15.95	25.27	22.39	25.26	26.37
$A_{sxtB1} (cm^2)$	5.37	5.59	0.00	0.00	4.15	4.50	0.00	0.00
$A_{sxtB2} (cm^2)$	30.04	31.60	36.20	38.19	31.87	34.94	59.65	60.94
$A_{sxtB3} (cm^2)$	0.00	0.00	4.89	5.05	0.00	0.00	0.00	0.00
$A_{sxtT} (cm^2)$	47.18	49.90	54.61	58.03	46.17	51.18	86.93	89.42
$A_{syLB} (cm^2)$	33.09	35.00	39.14	41.60	37.81	41.91	81.98	84.33
$A_{syLBc} (cm^2)$	37.80	39.98	78.29	83.20	45.30	50.21	138.62	142.60
$A_{syLBg} (cm^2)$	26.97	28.53	10.10	10.74	28.27	31.33	25.34	26.07
$A_{syLT} (cm^2)$	96.45	90.21	85.30	79.60	104.56	92.68	81.98	84.33
$A_{syLTd} (cm^2)$	107.85	48.51	138.42	93.75	46.10	60.31	130.23	133.97
$A_{syLTe} (cm^2)$	95.34	89.17	107.32	100.14	103.47	91.72	89.53	92.10
$A_{syLTf} (cm^2)$	80.96	35.73	19.03	17.60	41.15	40.69	33.73	34.70
C_{min}	18.99 C_c	19.10 C_c	20.20 C_c	20.35 C_c	19.63 C_c	19.93 C_c	27.37 C_c	28.04 C_c

Elaboración propia.

4. Resultados

La tabla 4 muestra la solución óptima para obtener el área mínima de los cuatro casos. Los resultados presentan lo siguiente: 1) El momento de inercia alrededor del eje X menor aparece en el caso 4 de $I_x = 30.01 \text{ m}^4$ (SI) e $I_x = 30.34 \text{ m}^4$ (SF), y el mayor ocurre en el caso 1 de $I_x = 57.22 \text{ m}^4$ (SI) e $I_x = 59.10 \text{ m}^4$ (SF); 2) El momento de inercia alrededor del eje Y menor aparece en el caso 1 de $I_x = 8.84 \text{ m}^4$ (SI) e $I_x = 9.94 \text{ m}^4$ (SF), y el mayor ocurre en el caso 2 de $I_x = 13.74 \text{ m}^4$ (SI) e $I_x = 14.28 \text{ m}^4$ (SF); 3) El momento resultante alrededor del eje X menor en valor absoluto se presenta en el caso 1 de $M_{xT} = -277.52 \text{ kN-m}$ (SI) y $M_{xT} = -314.00 \text{ kN-m}$ (SF), y el mayor ocurre en el caso 2 de $M_{xT} = -484.15 \text{ kN-m}$ (SI) y $M_{xT} = -453.33 \text{ kN-m}$ (SF); 4) La fuerza resultante R y el momento resultante alrededor del eje Y son los mismos en todos los casos; 5) La dimensión en la dirección Y menor aparece en el caso 4 de $a = 5.40 \text{ m}$ (SI y SF), y el mayor ocurre en el caso 1 de $a = 6.53 \text{ m}$ (SI) y $a = 6.60 \text{ m}$ (SF); 6) La dimensión larga en la dirección X menor aparece en el caso 1 de $b_1 = 3.00 \text{ m}$ (SI y SF), y el mayor ocurre en el caso 2 de $a = 4.75 \text{ m}$ (SI) y $a = 4.80 \text{ m}$ (SF); 7) La dimensión corta en la dirección X menor aparece en el caso 2 de $b_2 = 0.00 \text{ m}$ (SI y SF), y el mayor ocurre en los casos 1 y 3 de $b_2 = 2.00 \text{ m}$ (SI y SF); 8) La distancia en dirección Y a partir del centro de la columna 1 al extremo libre menor aparece en los casos 2 y 4 de $e = 0.20 \text{ m}$ (SI y SF), y el mayor ocurre en el caso 1 de $e = 1.10 \text{ m}$ (SI) y $e = 1.15 \text{ m}$ (SF); 9) La distancia en dirección Y a partir del centro de la columna 2 al extremo libre menor aparece en los casos 3 y 4 de $f = 0.20 \text{ m}$ (SI y SF), y el mayor ocurre en el caso 2 de $f = 0.96 \text{ m}$ (SI) y $f = 1.00 \text{ m}$ (SF); 10) El centro de gravedad de la zapata en dirección Y a partir de b_1 menor se presenta en el caso 2 de $y_t = 2.05 \text{ m}$ (SI) e $y_t = 2.07 \text{ m}$ (SF), y el mayor ocurre en el caso 1 de $y_t = 3.05 \text{ m}$ (SI) e $y_t = 3.08 \text{ m}$

(SF); 11) La presión del suelo sobre la zapata en el vértice 1 es el mismo para todos los casos de $q_1 = 215.00 \text{ kN/m}^2$ (SI), y el menor ocurre en el caso 3 de $q_1 = 208.12 \text{ kN/m}^2$ (SF), y el mayor aparece en el caso 4 de $q_1 = 213.01 \text{ kN/m}^2$ (SF); 12) La presión del suelo sobre la zapata en el vértice 2 menor aparece en el caso 2 de $q_2 = 21.41 \text{ kN/m}^2$ (SI) y en el caso 1 de $q_2 = 22.98 \text{ kN/m}^2$ (SF), y el mayor aparece en el caso 3 de $q_2 = 27.58 \text{ kN/m}^2$ (SI) y $q_2 = 25.36 \text{ kN/m}^2$ (SF); 13) La presión del suelo sobre la zapata en el vértice 3 es el mismo para todos los casos de $q_3 = 215.00 \text{ kN/m}^2$ (SI), y el menor ocurre en el caso 2 de $q_3 = 206.82 \text{ kN/m}^2$ (SF), y el mayor aparece en el caso 1 de $q_3 = 214.69 \text{ kN/m}^2$ (SF); 14) La presión del suelo sobre la zapata en el vértice 4 menor aparece en el caso 1 de $q_4 = 88.33 \text{ kN/m}^2$ (SI) y $q_4 = 89.38 \text{ kN/m}^2$ (SF), y el mayor aparece en el caso 2 de $q_4 = 215.00 \text{ kN/m}^2$ (SI) y $q_4 = 206.82 \text{ kN/m}^2$ (SF); 15) El área más pequeña se presenta en el caso 2 de $A_{\min} = 14.62 \text{ m}^2$ (SI) y en el caso 4 de $A_{\min} = 14.85 \text{ m}^2$ (SF), y el área más grande se presenta en el caso 1 de $A_{\min} = 16.32 \text{ m}^2$ (SI) y $A_{\min} = 16.50 \text{ m}^2$ (SF).

La tabla 5 muestra la solución óptima para obtener el costo mínimo de los cuatro casos. La solución inicial se obtiene a partir de las dimensiones de la zapata de la solución final de la tabla 3, y posteriormente se ajusta la profundidad efectiva para obtener la solución propuesta. Los resultados obtenidos a partir de la solución propuesta son los siguientes: 1) El porcentaje de acero de refuerzo menor en la parte inferior de la columna 1 en la dirección del eje X se presenta en el caso 4 de $\rho_{P1} = 0.00372$, y el mayor ocurre en el caso 2 de $\rho_{P1} = 0.01771$; 2) El porcentaje de acero de refuerzo menor en la parte inferior de la columna 2 en la dirección del eje X se presenta en los casos 2 y 4 de $\rho_{P2} = 0.00333$, y el mayor ocurre en el caso 3 de $\rho_{P2} = 0.00750$; 3) Los porcentajes de acero de refuerzo en la parte inferior en la

dirección Y sobre los ejes c y g son los mismos para todos los casos de $\rho_{yLBc} = \rho_{yLBg} = 0.00333$; 4) Los porcentajes de acero de refuerzo menores en la parte superior en la dirección Y sobre los ejes d, e y f se presenta en el caso 4 de $\rho_{yLTd} = \rho_{yLTe} = \rho_{yLTf} = 0.00333$ y el mayor ocurre en el caso 1 de $\rho_{yLTd} = 0.00413$ y $\rho_{yLTe} = 0.00859$, en el caso 3 de $\rho_{yLTf} = 0.00414$; 5) El área de acero de refuerzo más pequeña en la parte inferior de la columna 1 en la dirección del eje X se presenta en el caso 4 de $A_{sp1} = 29.40 \text{ cm}^2$, y el área más grande ocurre en el caso 2 de $A_{sp1} = 60.79 \text{ cm}^2$; 6) El área de acero de refuerzo más pequeña en la parte inferior de la columna 2 en la dirección del eje X se presenta en el caso 2 de $A_{sp2} = 15.95 \text{ cm}^2$, y el área más grande ocurre en el caso 4 de $A_{sp2} = 26.37 \text{ cm}^2$; 7) El área de acero de refuerzo más pequeña en la parte inferior con ancho $(e - w_1/2)$ en la dirección del eje X se presenta en los casos 2 y 4 de $A_{sxTB1} = 0 \text{ cm}^2$ porque el ancho es cero, y el área más grande ocurre en el caso 1 de $A_{sxTB1} = 5.59 \text{ cm}^2$; 8) El área de acero de refuerzo más pequeña en la parte inferior con ancho $(L - c_1/2 - c_3/2 - d)$ en la dirección del eje X se presenta en el caso 1 de $A_{sxTB2} = 31.60 \text{ cm}^2$, y el área más grande ocurre en el caso 4 de $A_{sxTB2} = 60.94 \text{ cm}^2$; 9) El área de acero de refuerzo más pequeña en la parte inferior con ancho $(a - e - L - c_3/2 - d/2)$ en la dirección del eje X se presenta en los casos 1, 3 y 4 de $A_{sxTB3} = 0 \text{ cm}^2$ porque el ancho es cero, y el área más grande ocurre en el caso 2 de $A_{sxTB3} = 5.05 \text{ cm}^2$; 10) El área de acero de refuerzo más pequeña en la parte superior con un ancho a en la dirección del eje X se presenta en el caso 1 de $A_{sxTT} = 49.90 \text{ cm}^2$, y el área más grande ocurre en el caso 4 de $A_{sxTT} = 89.42 \text{ cm}^2$; 11) El área de acero de refuerzo más pequeña en la parte inferior ubicada en la parte media en la dirección del eje Y se presenta en el caso 1 de $A_{syLB} = 35.00 \text{ cm}^2$, y el área más grande ocurre en el caso 4 de $A_{syLB} = 84.33 \text{ cm}^2$; 12) El área de acero de refuerzo más pequeña en la parte

superior ubicada en la parte media en la dirección del eje Y se presenta en el caso 2 de $A_{syLT} = 79.60 \text{ cm}^2$, y el área más grande ocurre en el caso 3 de $A_{syLT} = 92.68 \text{ cm}^2$; 13) El costo menor se presenta en el caso 1 de $C_{\min} = 19.10C_c$, y el mayor costo ocurre en el caso 4 de $C_{\min} = 28.04C_c$.

Los resultados propuestos en la tabla 5 se deben de ajustar las áreas de acero de refuerzo a las medidas estándar de las varillas para obtener el diseño final.

Las figuras 6 a 9 muestran en detalle el diseño final bajo el criterio de costo mínimo para los cuatro casos.

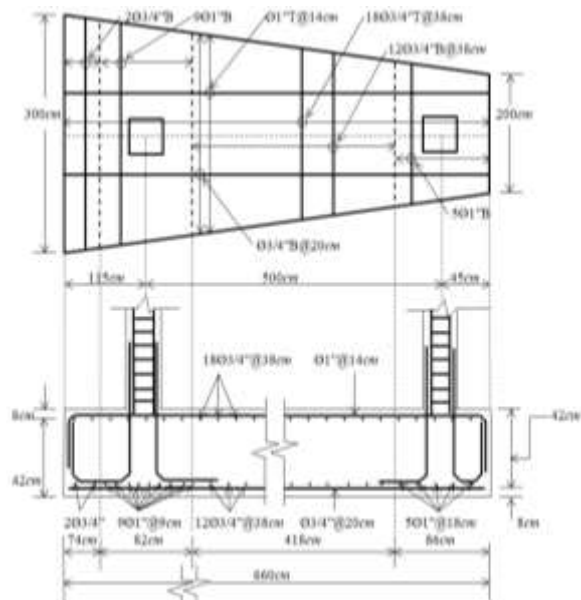


Figura 6. Caso 1.
Elaboración propia.

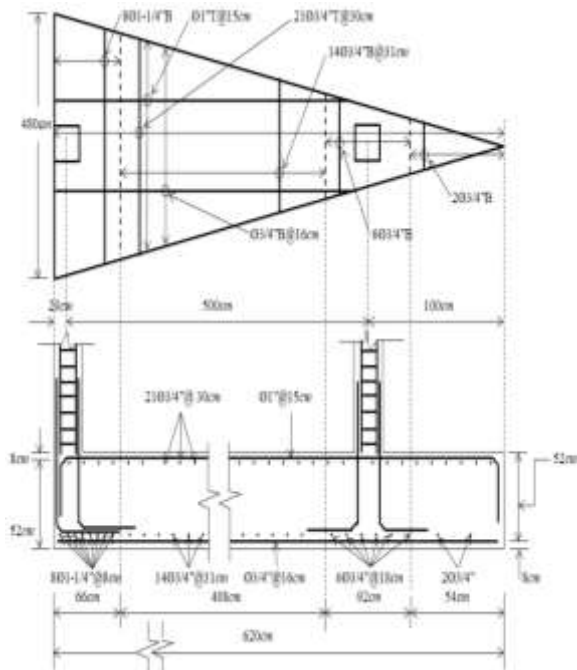


Figura 7. Caso 2.
Elaboración propia.

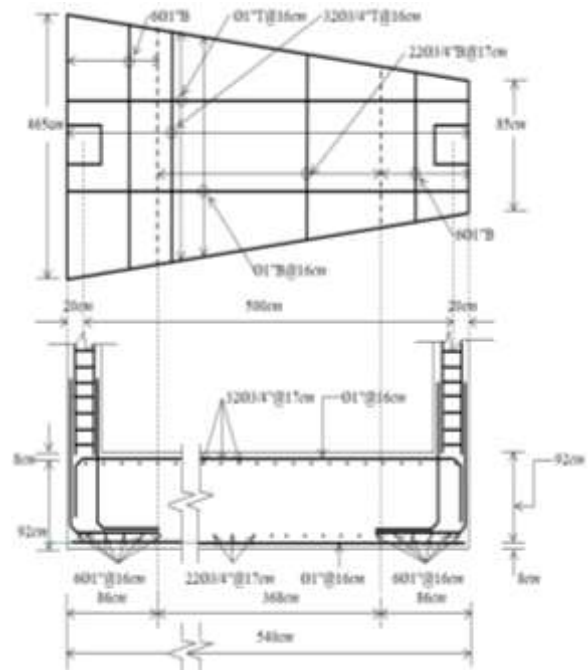


Figura 9. Caso 4.
Elaboración propia.

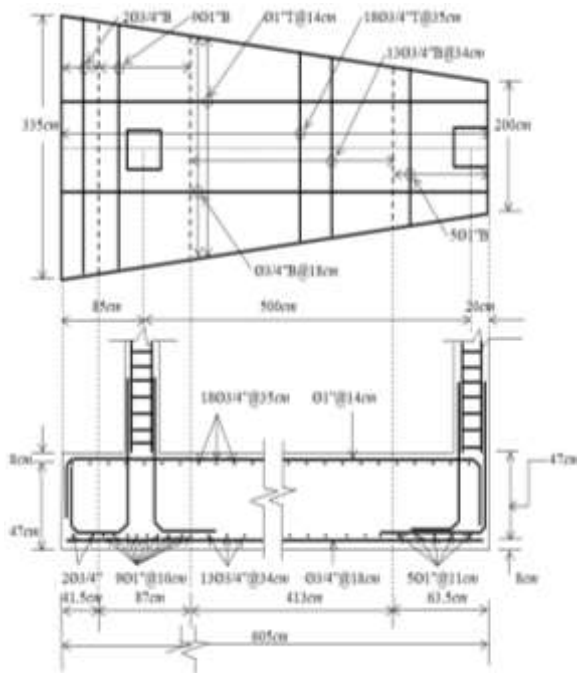


Figura 8. Caso 3.
Elaboración propia.

La figura 10 muestra las áreas de acero de refuerzo para los cuatro casos basado en las figuras 6 a 9 (datos prácticos o diseño final).

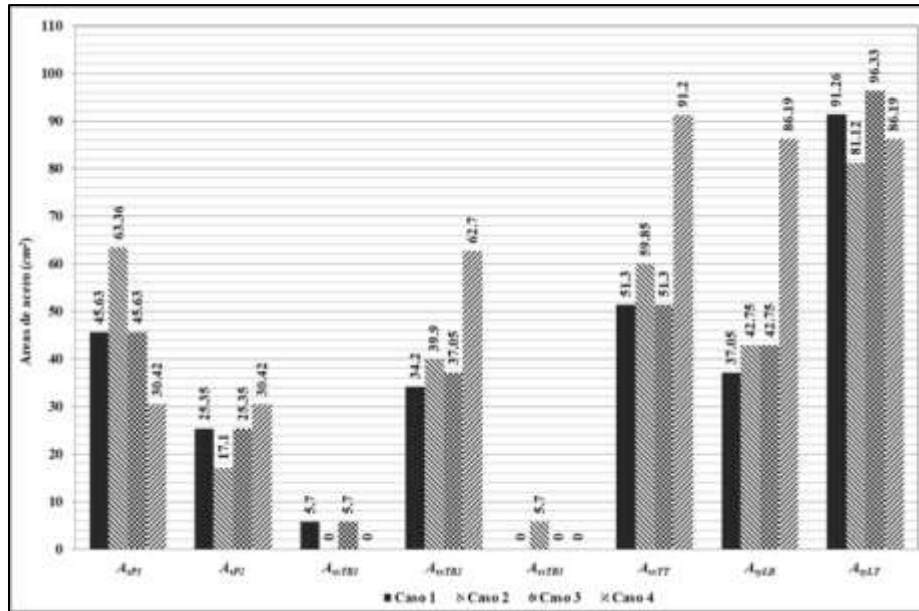


Figura 10. Áreas de acero.
Elaboración propia.

La figura 10 presenta las áreas de acero de refuerzo de las zapatas combinadas trapezoidales para cada caso. El orden de mayor a menor de los cuatro casos estudiados es: 1) Para el área de acero de refuerzo en la parte inferior de la columna 1 en la dirección del eje X “ A_{sp1} ” es: 2, 3 y 1, 4; 2) Para el área de acero de refuerzo en la parte inferior de la columna 2 en la dirección del eje X “ A_{sp2} ” es: 4, 3 y 1, 2; 3) Para el área de acero de refuerzo en la parte inferior con ancho $(e - w_1/2)$ en la dirección del eje X “ A_{sxTB1} ” es: 1 y 3, 2 y 4; 4) Para el área de acero de refuerzo en la parte inferior con ancho $(L - c_1/2 - c_3/2 - d)$ en la dirección del eje X “ A_{sxTB2} ” es: 4, 2, 3, 1; 5) Para el área de acero de refuerzo en la parte inferior

con ancho $(a - e - L - c_3/2 - d/2)$ en la dirección del eje X “ A_{sxTB3} ” es: 2, 4 y 3 y 1; 6) Para el área de acero de refuerzo en la parte superior con ancho a en la dirección del eje X “ A_{sxTT} ” es: 4, 2, 3 y 1; 7) Para el área de acero de refuerzo en la parte inferior ubicada en la parte media en la dirección del eje Y “ A_{syLB} ” es: 4, 3 y 2, 1; 8) Para el área de acero de refuerzo en la parte superior ubicada en la parte media en la dirección del eje Y “ A_{syLT} ” es: 3, 1, 4, 2.

La figura 11 muestra las áreas mínimas de la superficie en contacto con el suelo y los costos mínimos de diseño de las zapatas para cada caso (datos prácticos o diseño final).

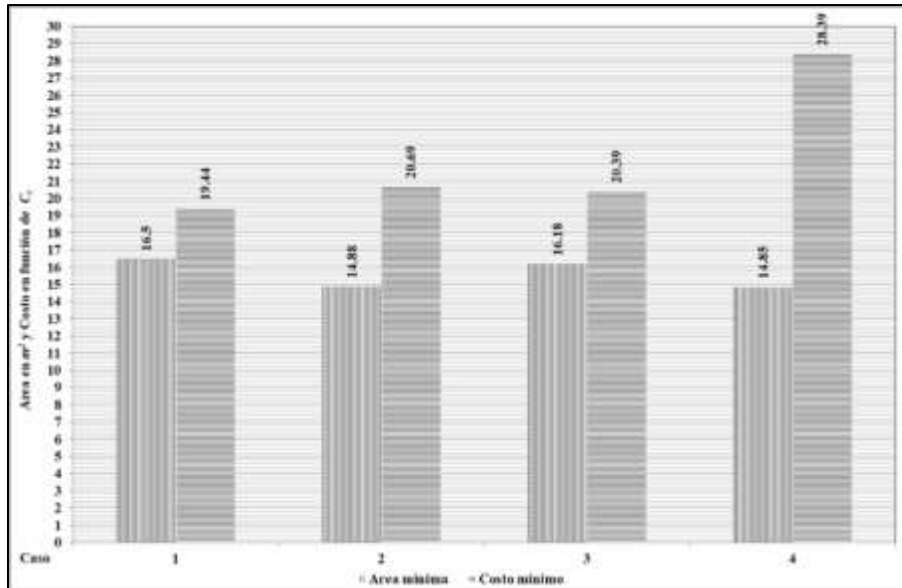


Figura 11. Áreas mínimas y costos mínimos.
Elaboración propia.

La figura 11 presenta las áreas mínimas de la superficie en contacto con el suelo y los costos mínimos de diseño de las zapatas combinadas trapezoidales para cada caso. Los resultados obtenidos muestran lo siguiente: 1) El área más pequeña se presenta en el caso 4 de $A_{\min} = 14.85 \text{ m}^2$, y el área más grande se presenta en el caso 1 de $A_{\min} = 16.50 \text{ m}^2$; 2) El menor costo se presenta en el caso 1 de $C_{\min} = 19.44C_c$, y el mayor costo ocurre en el caso 4 de $C_{\min} = 28.39C_c$.

El orden de mayor a menor de los cuatro casos estudiados es: 1) Para el área mínima es 1, 3, 2 y 4. 2) Para el costo mínimo es 4, 2, 3 y 1. El costo del caso 4 se incrementa demasiado porque el espesor de la zapata es mayor que los otros casos.

5. Conclusiones

Este trabajo de investigación presenta el diseño óptimo bajo el criterio de costo mínimo para las zapatas combinadas trapezoidales de concreto reforzado sometidas a una carga axial y dos momentos ortogonales en cada columna.

Los parámetros constantes (conocidos) para obtener el área mínima son: $P_1, M_{x1}, M_{y1}, P_2, M_{x2}, M_{y2}, R, c_1, c_2, c_3, c_4, L, q_{aa}$, y las variables de decisión (desconocidas) son: $A_{\min}, I_x, I_y, M_{xT}, M_{yT}, a, b_1, b_2, e, f, x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4, y_t, q_1, q_2, q_3, q_4$.

Los parámetros constantes (conocidos) para encontrar el costo mínimo son: $a, b_1, b_2, M_{uc}, M_{ud}, M_{ue}, M_{uf}$ y M_{ug} , y los parámetros $M_{ua}, M_{ub}, V_{uh}, V_{ui}, V_{uj}, V_{uk}, V_{ul}, V_{um}, V_{up1}$ y V_{up2} se presentan en función de d , y las variables de decisión (desconocidas) son: $C_{\min}, d, \rho_{P1}, \rho_{P2}, \rho_{yLBc}, \rho_{yLBg}, \rho_{yLTd}, \rho_{yLTe}, \rho_{yLTf}, A_{sp1}, A_{sp2}, A_{sxTB1}, A_{sxTB2}, A_{sxTB3}, A_{sxTT}, A_{syLB}, A_{syLBc}, A_{syLBg}, A_{syLT}, A_{syLTd}, A_{syLTe}, A_{syLTf}$.

Las principales conclusiones son:

1.- El área mínima no garantiza el costo mínimo para el diseño de zapatas combinadas trapezoidales, porque el área mínima se presenta en el caso 4 y el costo mínimo se presenta en el caso 1 (ver Figura 11).

2.- Los modelos óptimos para el área mínima y el costo mínimo para el diseño de zapatas combinadas trapezoidales podrían

utilizarse para el diseño de zapatas combinadas rectangulares, sustituyendo $b_1 = b_2$ en los dos modelos.

3.- Los modelos óptimos para el área mínima y el costo mínimo para el diseño de zapatas combinadas trapezoidales son más precisos (porque los modelos actuales consideran uniforme o constante el diagrama de presión del suelo sobre la zapata) y convergen más rápido (por medio de un programa que utilice técnicas de optimización).

4.- Los modelos óptimos para el área mínima y el costo mínimo para el diseño de zapatas combinadas trapezoidales podrían ser utilizados para diferentes códigos de diseño de concreto reforzado, simplemente modificando las ecuaciones de las capacidades de resistencia para el momento, para el cortante por flexión y para el cortante por punzonamiento, según cada uno de los códigos.

5.- El modelo óptimo para el área mínima presentado en este documento es más general porque considera los cuatro casos, y Pasillas-Orona y col. (2020) [15] toma en cuenta dos casos únicamente (Caso 2: con límite en la columna 1, y Caso 4: con dos lados opuestos limitados).

6.- Las ecuaciones para el diseño de zapatas combinadas trapezoidales son más generales porque consideran los cuatro casos, y Luevanos-Rojas (2015) [16] toma en cuenta dos casos (Caso 2: con límite en la columna 1, y Caso 4: con dos lados opuestos limitados).

Los modelos óptimos para el área mínima y el costo mínimo para el diseño de zapatas combinadas trapezoidales de concreto reforzado asumen que este miembro estructural es rígido y las capas de suelo de apoyo son elásticas cumpliendo con la ecuación de flexión biaxial, es decir, la presión se comporta linealmente.

Las sugerencias para futuras investigaciones son:

1.- Modelo de costo mínimo para otro tipo de cimentaciones poco profundas como losas de cimentaciones.

2.- Modelo de costo mínimo para diseño de zapatas combinadas trapezoidales de concreto reforzado apoyadas en otro tipo de suelo como por ejemplo en suelos totalmente granulares (suelos arenosos) o totalmente cohesivos (suelos arcillosos), ya que el diagrama de presiones es parabólico.

6. Agradecimientos

La investigación descrita en este trabajo fue financiada por la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Contaduría y Administración de la Universidad Autónoma de Coahuila, Unidad Torreón. Los autores también agradecen a los revisores y al editor por los comentarios y sugerencias para mejorar la presentación. Los estudiantes del doctorado Víctor Bonifacio Vela Moreno (CVU: 819735) y Rogelio Barraza Saucedo (CVU: 1013684) agradecen al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico.

7. Referencias

1. Hassaan, G. A. (2014). "Optimal design of machinery shallow foundations with silt soils". *International Journal of Mechanical Engineering (IJME)*, 4(3), 11-24. <https://vixra.org/pdf/1601.0328v1.pdf>.

2. Hui, L., Zhuoyi, C., & Mingji, Z. (2015). "Genetic algorithm application on optimal design of strip foundation". *The Open Cybernetics & Systemics Journal*, 9, 335-339. https://benthamopen.com/ABSTRACT/TOC_SJ-9-335.

3. López-Chavarría, S., Luévanos-Rojas, A., & Medina-Elizondo, M. (2017). "Optimal dimensioning for the corner combined

- footings”. *Advances in Computational Design*, 2(2), 169-183. <https://doi.org/10.12989/acd.2017.2.2.169>.
4. Yeh, J.-P., & Huang, K.-H. (2017). “Effects of strengths of steel and concrete, eccentricity and bar size on the optimization of eccentrically loaded footings”. *Transactions on Machine Learning and Artificial Intelligence*, 5(5), 87-97. <https://journals.scholarpublishing.org/index.php/TMLAI/article/view/3592>.
5. Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., & Medina-Elizondo, M. (2017). “Optimal design for rectangular isolated footings using the real soil pressure”. *Ingeniería e Investigación*, 37(2), 25-33. <http://dx.doi.org/10.15446/ing.investig.v37n2.61447>.
6. Jelušič, P., & Žlender, B. (2018). “Optimal design of pad footing based on MINLP optimization”. *Soils and Foundations*, 58(2), 277-289. <https://doi.org/10.1016/j.sandf.2018.02.002>.
7. Velázquez-Santillán, F., Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M., & Sandoval-Rivas, R. (2018). “Numerical experimentation for the optimal design for reinforced concrete rectangular combined footings”. *Advances in Computational Design*, 3(1), 49-69. <https://doi.org/10.12989/acd.2018.3.1.049>.
8. Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., & Medina-Elizondo, M. (2018). “A new model for T-shaped combined footings Part I: Optimal dimensioning”. *Geomechanics and Engineering*, 14(1), 51-60. <https://doi.org/10.12989/gae.2018.14.1.051>.
9. Malapur, M. M., Cholappanavar, P., & Fernandes, R. J. (2018). “Optimization of RC column and footings using genetic algorithm”. *International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET)*, 5(8), 208-219. <https://www.irjet.net/archives/V5/i8/IRJET-V5I897.pdf>.
10. Rawat, S., & Muttal, R. K. (2018). “Optimization of Eccentrically Loaded Reinforced-Concrete Isolated Footings”. *Practice Periodical on Structural Design and Construction*, 23(2):06018002. <https://ascelibrary.org/doi/10.1061/%28ASCE%29SC.1943-5576.0000366>.
11. Aguilera-Mancilla, G., Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., & Medina-Elizondo, M. (2019). “Modeling for the strap combined footings Part I: Optimal dimensioning”. *Steel and Composite Structures*, 32(2), 97-108. <https://doi.org/10.12989/scs.2019.30.2.097>.
12. López-Chavarría, S., Luévanos-Rojas, A., Medina-Elizondo, M., Sandoval-Rivas, R., & Velázquez-Santillán, F. (2019). “Optimal design for the reinforced concrete circular isolated footings”. *Advances in Computational Design*, 4(3), 169-183. <http://dx.doi.org/10.12989/acd.2019.4.3.273>.
13. Chaudhuri, P., & Maity, D. (2020). “Cost optimization of rectangular RC footing using GA and UPSO”. *Soft Computing*, 24, 709-721. <https://doi.org/10.1007/s00500-019-04437-x>.
14. Luévanos-Rojas, A. (2015). “A new mathematical model for dimensioning of the boundary trapezoidal combined footings”. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 11(4), 1269-1279. <https://doi.org/10.24507/ijicic.11.04.1269>.
15. Pasillas-Orona, A. I., Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M., & Aguilera-Mancilla, G. (2020). “Un modelo optimizado para zapatas combinadas trapezoidales apoyadas sobre el terreno:

Superficie óptima”. *Acta Universitaria*, 30, 1-18. <https://doi.org/10.15174/au.2020.2973>.

16. Luévanos-Rojas A. (2015). “Design of boundary combined footings of trapezoidal form using a new model”. *Structural Engineering and Mechanics*, 52(4), 767-786. <http://dx.doi.org/10.12989/sem.2015.56.5.745>.

17. ACI 318-19. 2019. *Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary*, Committee 318, New York, USA.

18. Maple. 2015. Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc., Waterloo, Ontario.